

การแปลงทางเรขาคณิต



ที่มา: คณิตภาพ ๑๑๓

พัดมีส่วนประกอบหลัก ได้แก่ โครงพัด และกระดาษติดพัด โดยโครงพัดจะมีแกนพัดที่ทำจากไม้ไผ่หลายชิ้นที่มีขนาดเท่ากัน นำมายึดติดเข้าด้วยกันที่ปลายด้านหนึ่ง เพื่อใช้เป็นจุดหมุนสำหรับ เวลาพับหรือกางพัด เมื่อประกอบโครงพัดเสร็จจึงติดกระดาษและ วาดลวดลายตามที่ต้องการ

สาระสำคัญ

- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง (ค 2.2 ม.2/3)

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- การเลื่อนขนาน
- การสะท้อน
- การหมุน
- การนำความรู้เกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิตไปใช้ในการแก้ปัญหา

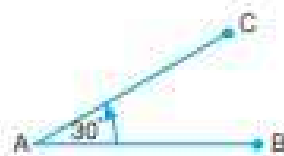


นักเรียนคิดว่า
พัดเกี่ยวข้องกับ
การแปลง
ทางเรขาคณิต
อย่างไร

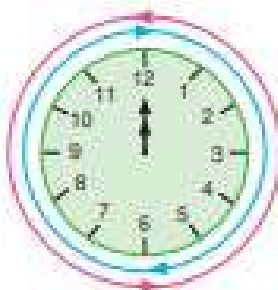


ควรรู้ก่อนเรียน

การบอกทิศทางของมุม



$\angle BAC$ มีขนาด 30°
ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
จาก $\overline{AB}$



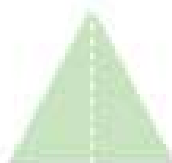
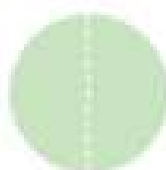
— ทวนเข็มนาฬิกา
— ตามเข็มนาฬิกา



$\angle BAC$ มีขนาด 30°
ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
จาก $\overline{AB}$

รูปที่มีแกนสมมาตร

รูปที่พับครึ่งแล้ว แต่ละข้างของรอยพับทับกันสนิท รอยพับนี้เรียกว่า แกนสมมาตร และเรียก
รูปนี้ว่าเป็น รูปสมมาตร

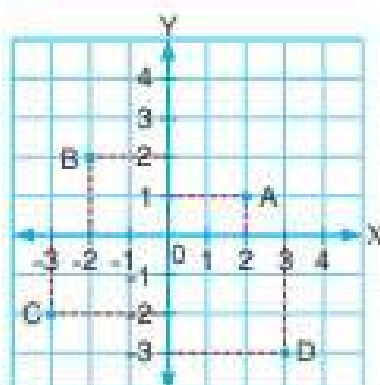


คู่อันดับ

คู่อันดับ เป็นการเขียนสัญลักษณ์ที่แสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของกลุ่มสองกลุ่มที่มีความสัมพันธ์กันภายใต้เงื่อนไขหรือข้อตกลง การจับคู่ระหว่าง a และ b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (a, b) อ่านว่า คู่อันดับเอบี การเขียนกราฟของคู่อันดับบนระบบพิกัดฉาก ทำได้ดังนี้

การเขียนกราฟของ $B(-2, 2)$
ให้เริ่มจากจุด $(0, 0)$ นับตาม
แนวแกนแนอนไปทางซ้าย 2 หน่วย
จากนั้น นับตามแนวแกนตั้งขึ้นไป
2 หน่วย

การเขียนกราฟของ $C(-3, -2)$
ให้เริ่มจากจุด $(0, 0)$ นับตาม
แนวแกนแนอนไปทางซ้าย 3 หน่วย
จากนั้น นับตามแนวแกนตั้งลงมา
2 หน่วย



การเขียนกราฟของ $A(2, 1)$
ให้เริ่มจากจุด $(0, 0)$ นับตาม
แนวแกนแนอนไปทางขวา 2 หน่วย
จากนั้น นับตามแนวแกนตั้งขึ้นไป
1 หน่วย

การเขียนกราฟของ $D(3, -3)$
ให้เริ่มจากจุด $(0, 0)$ นับตาม
แนวแกนแนอนไปทางขวา 3 หน่วย
จากนั้น นับตามแนวแกนตั้ง
ลงมา 3 หน่วย



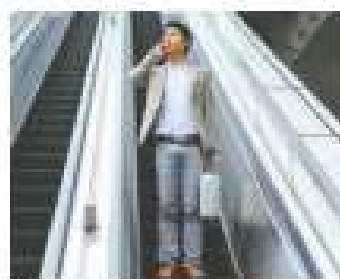
แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน



4.1 การแปลง

ในชีวิตจริงมักจะพบเห็นการย้ายตำแหน่งของวัตถุหรือสิ่งของต่าง ๆ จากที่แห่งหนึ่งไปยังที่อีกแห่งหนึ่ง เช่น การเลื่อนตู้เอกสารจากที่แห่งหนึ่งไปยังที่อีกแห่งหนึ่ง การขึ้นลิฟต์จากชั้นหนึ่งไปชั้นห้า การมองเห็นรูปของตัวเองในการกระจกเงา รูปเงาสะท้อนของต้นไม้ในอ่างเก็บน้ำที่ใสสะอาด การหมุนของวงล้อปาเป้า การหมุนของกังหันลม การเล่นหมากรุกฮอส การมองแผนที่ผ่านแว่นขยาย ภาพที่ได้จากการถ่ายภาพ เป็นต้น

การย้ายตำแหน่งของวัตถุหรือสิ่งของต่าง ๆ จากตัวอย่างที่กล่าวถึงเรียกว่า การแปลง



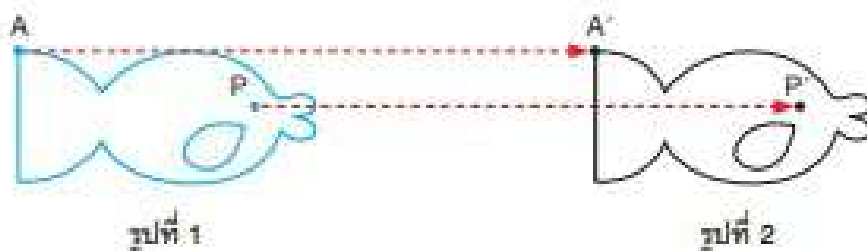
ที่มา: คลังภาพ อจท.

จากรูปข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่ามีการเปลี่ยนตำแหน่งแต่ขนาดไม่เปลี่ยนแปลง แต่บางรูปอาจเปลี่ยนทั้งตำแหน่งและขนาด กล่าวได้ว่า การแปลงอาจทำให้วัตถุหรือสิ่งของต่าง ๆ มีการเปลี่ยนแปลงขนาด รูปร่าง หรือตำแหน่ง

การแปลงทางเรขาคณิต

การแปลง (transformation) เรียกรูปก่อนการแปลงว่า รูปต้นแบบ (pre-image) และเรียกรูปหลังการแปลงว่า ภาพ (image) ที่ได้จากการแปลง

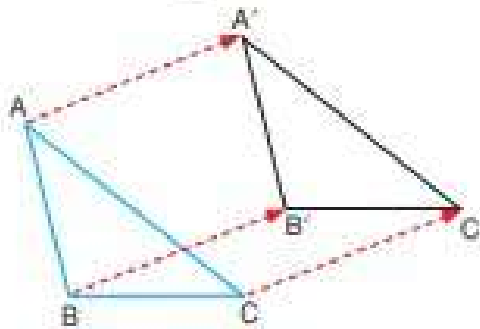
กำหนดให้รูปที่ 1 เป็นรูปต้นแบบ และรูปที่ 2 เป็นภาพที่ได้จากการแปลงรูปที่ 1



จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ให้จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งบนรูปต้นแบบและจุด P' (อ่านว่า พีไพร์ม) เป็นภาพที่ได้จากการแปลงจุด P เรียกจุด P และจุด P' ว่า เป็นจุดที่สมนัยกัน และในทำนองเดียวกันจุด A และจุด A' เป็นจุดที่สมนัยกัน เช่นกัน ดังนั้นเมื่อเลือกจุดอื่น ๆ บนรูปต้นแบบจะมีจุดที่สมนัยกันบนภาพที่ได้จากการแปลงรูปต้นแบบนั้นเพียงจุดเดียวเท่านั้น

การแปลงจะเป็นการจับคู่ระหว่างจุดที่อยู่บนรูปต้นแบบกับจุดบนภาพ ซึ่งเป็นจุดที่
สมนัยกับรูปต้นแบบ และมีเพียงจุดเดียวเท่านั้น

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้



💡 คณิตน่ารู้

เรานิยมใช้สัญลักษณ์ '
(อ่านว่า ไพร์ม) บนตัวอักษร
ที่ใช้แทนจุดที่ได้จากการ
แปลง เช่น จุด A' เป็นภาพ
ที่ได้จากการแปลงจุด A

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ และรูปสามเหลี่ยม A'B'C' เป็นภาพที่ได้
จากการแปลง

โดยมี จุด A และจุด A' เป็นจุดที่สมนัยกัน

จุด B และจุด B' เป็นจุดที่สมนัยกัน

และ จุด C และจุด C' เป็นจุดที่สมนัยกัน

และกล่าวว่า $\overline{AB}$ กับ $\overline{A'B'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน ทำให้ $AB = A'B'$

$\overline{BC}$ กับ $\overline{B'C'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน ทำให้ $BC = B'C'$

$\overline{CA}$ กับ $\overline{C'A'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน ทำให้ $CA = C'A'$

และ $\angle ABC$ กับ $\angle A'B'C'$ เป็นมุมที่สมนัยกัน ทำให้ $\angle ABC = \angle A'B'C'$

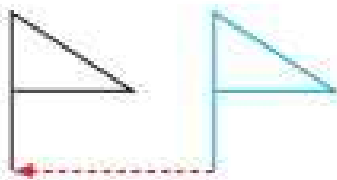
$\angle BCA$ กับ $\angle B'C'A'$ เป็นมุมที่สมนัยกัน ทำให้ $\angle BCA = \angle B'C'A'$

$\angle CAB$ กับ $\angle C'A'B'$ เป็นมุมที่สมนัยกัน ทำให้ $\angle CAB = \angle C'A'B'$

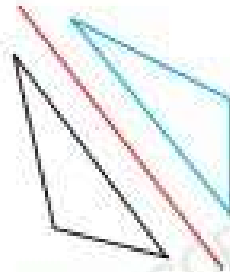
นักเรียนจะเห็นว่ามุมคู่ที่สมนัยกัน จะมีแขนของมุมเป็นด้านที่สมนัยกัน เช่น $\angle ABC$ กับ $\angle A'B'C'$ เป็นมุมที่สมนัยกัน โดยมี $\overline{AB}$ กับ $\overline{A'B'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน และ $\overline{BC}$ กับ $\overline{B'C'}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม A'B'C' มีด้านคู่ที่สมนัยกัน 3 คู่ และมีมุมที่สมนัยกันเท่ากัน 3 คู่ ซึ่งกล่าวได้ว่า รูป $\triangle ABC$ และรูป $\triangle A'B'C'$ มีขนาดเท่ากัน และมีรูปร่างเหมือนกัน

การแปลงทางเรขาคณิต เป็นการดำเนินการเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต ซึ่งทำให้เกิดการ
เปลี่ยนแปลงจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง โดยขนาดและรูปร่างอาจมีการ
เปลี่ยนแปลง แต่การเรียนในระดับชั้นนี้จะให้นักเรียนเรียนเฉพาะการแปลงที่ทำให้
ภาพที่ได้มีรูปร่างและขนาดเท่าเดิมเท่านั้น

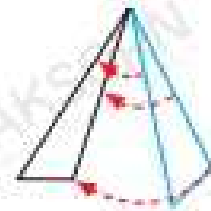
การแปลงทางเรขาคณิตที่จะนำเสนอมีทั้งหมด 3 แบบ ได้แก่ การเลื่อนขนาน (translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation) ซึ่งแต่ละแบบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่ได้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ



ตัวอย่างการแปลง
ที่เป็นเลื่อนขนาน



ตัวอย่างการแปลง
ที่เป็นสะท้อน



ตัวอย่างการแปลง
ที่เป็นหมุน

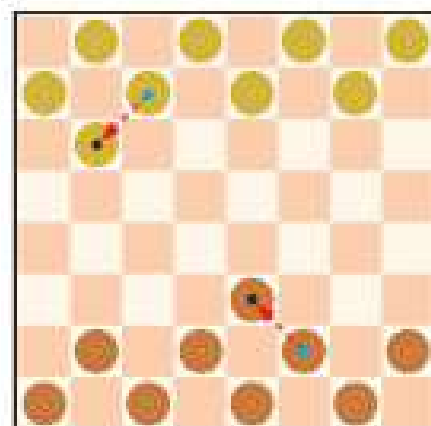
4.2 การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน

1. การเลื่อนขนาน

ในชีวิตจริงมีอุปกรณ์อำนวยความสะดวกหลายอย่างที่เกี่ยวข้องกับการเลื่อนขนาน เช่น บันไดเลื่อน ลิฟต์ ล้อรถแทรกเตอร์ เครื่องจักรจักรอกปูนซีเมนต์ เป็นต้น นอกจากนี้ยังเกี่ยวกับด้านกีฬาด้วย เช่น กีฬาหมากรุก หมากรุก เป็นต้น



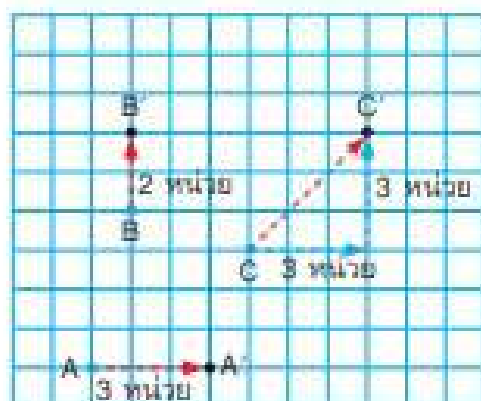
รูปคนขึ้นบันไดเลื่อน



รูปการเล่นหมากรุก

การเลื่อนขนานรูปเรขาคณิตบนระนาบ

พิจารณาการเลื่อนจุด A จุด B และจุด C ไปในทิศทางตามที่กำหนด ทำให้เกิดจุด A' จุด B' และจุด C' ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

จากรูปที่ 3 จะพบว่า

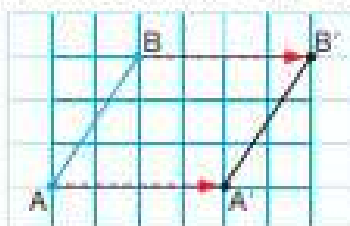
- 1) จุด A' เกิดจากการเลื่อนจุด A ไปทางขวา 3 หน่วย เรียกจุด A' ว่าเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด A ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ และกล่าวว่า จุด A' กับจุด A เป็นจุดที่สมนัยกัน
- 2) จุด B' เกิดจากการเลื่อนจุด B ไปด้านบนในแนวตั้ง 2 หน่วย เรียกจุด B' ว่าเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด B ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ และกล่าวว่า จุด B' กับจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน
- 3) จุด C' เกิดจากการเลื่อนจุด C ไปทางขวา 3 หน่วย และเลื่อนไปด้านบนในแนวตั้ง 3 หน่วย เรียกจุด C' ว่าเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด C ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ และกล่าวว่า จุด C' กับจุด C เป็นจุดที่สมนัยกัน

การเลื่อนขนานรูปเรขาคณิตบนระนาบของรูปที่ 3 เป็นไปตามบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

การเลื่อนขนานบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตแบบหนึ่งที่มีการจับคู่ระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ซึ่งเป็นจุดที่สมนัยกัน คือ จุดบนรูปต้นแบบกับจุดบนภาพที่ได้จากการแปลง โดยจุดทุกจุดบนรูปต้นแบบมีการเลื่อนไปในทิศทางเดียวกัน และเป็นระยะเท่ากัน ซึ่งทำให้ขนาดและรูปร่างของภาพที่ได้จากการแปลงเหมือนรูปต้นแบบ

พิจารณาการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรง AB ไปทางขวา 4 หน่วย จะได้ส่วนของเส้นตรง $A'B'$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรง AB ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

จากรูปที่ 4 จะพบว่า

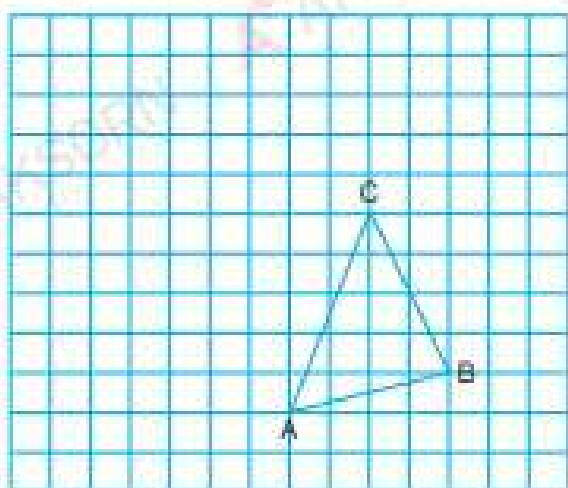
- 1) จุด A' กับจุด A เป็นจุดที่สมนัยกันและจุด B' กับจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน
- 2) จุด A' อยู่ห่างจากจุด A ไปทางขวา 4 หน่วยและจุด B' อยู่ห่างจากจุด B ไปทางขวา 4 หน่วย

จากข้อ 1) และข้อ 2) สามารถสรุปได้ว่า $AB = A'B'$ และ $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$

เมื่อเลือกจุดใด ๆ บน $\overline{AB}$ จะมีจุดบน $\overline{A'B'}$ ซึ่งมีระยะห่างไปทางขวา 4 หน่วย เพียงหนึ่งจุดซึ่งเป็นจุดที่สมนัยกัน กล่าวได้ว่า จุดทุกจุดบน $\overline{A'B'}$ อยู่ห่างจากจุดทุกจุดที่สมนัยกันจุดต่อจุดไปทางขวาของ $\overline{AB}$ เป็นระยะทาง 4 หน่วย

กิจกรรม กณิตศาสตร์

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ โดยทำลงในสมุด



1. เลื่อนจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ได้แก่ จุด A , จุด B และจุด C ไปทางซ้าย 4 หน่วย และขึ้นไปด้านบน 3 หน่วย โดยกำหนด

- 1) จุดที่เกิดจากเลื่อนจุด A ไปทางซ้าย 4 หน่วย และขึ้นไปด้านบน 3 หน่วย เป็นจุด A'
- 2) จุดที่เกิดจากเลื่อนจุด B ไปทางซ้าย 4 หน่วย และขึ้นไปด้านบน 3 หน่วย เป็นจุด B'
- 3) จุดที่เกิดจากเลื่อนจุด C ไปทางซ้าย 4 หน่วย และขึ้นไปด้านบน 3 หน่วย เป็นจุด C'

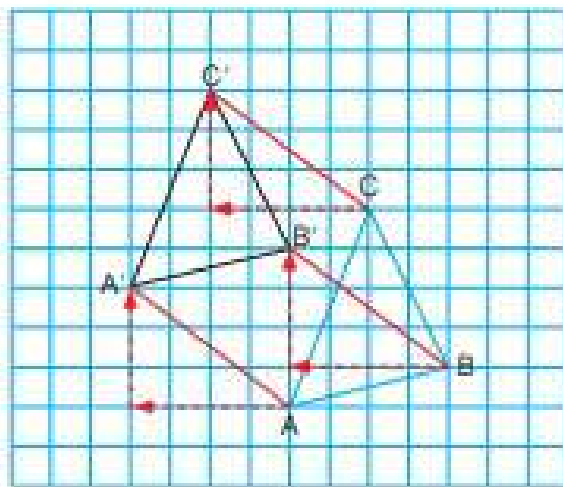
2. ลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ และ $\overline{A'C'}$ จะได้รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$
3. วัดความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$
4. เปรียบเทียบความยาวด้าน AB กับ $A'B'$, BC กับ $B'C'$ และ AC กับ $A'C'$ แล้วตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร
5. ลาก $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ แล้ววัดและเปรียบเทียบความยาวของเส้นทั้งสาม
6. ตรวจสอบว่า $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ขนานกันหรือไม่
7. จากกิจกรรมนี้สรุปได้ว่าอย่างไร



การเลื่อนขนาน

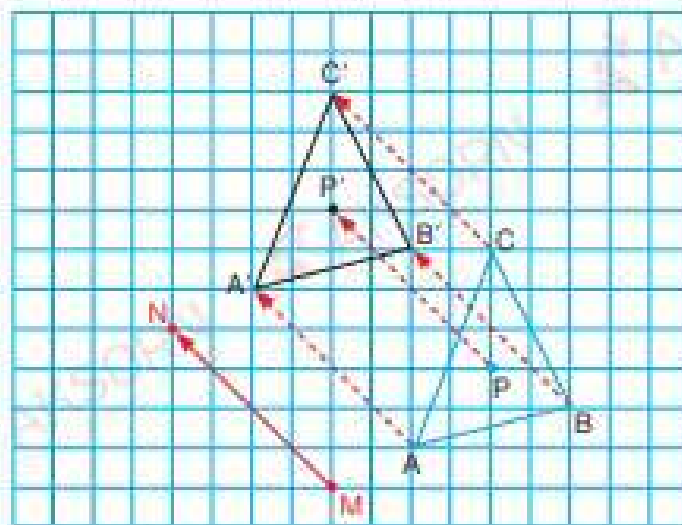


จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะได้ว่า



รูปที่ 5

สามารถสรุปได้ว่า เมื่อลาก $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ดังรูปที่ 5 จะพบว่า $\overline{A'B'}$ กับ $\overline{AB}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน $\overline{B'C'}$ กับ $\overline{BC}$ เป็นด้านที่สมนัยกันและ $\overline{C'A'}$ กับ $\overline{CA}$ เป็นด้านที่สมนัยกันทำให้ได้ว่า $AA' = BB' = CC'$ และ $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$



รูปที่ 6

และถ้าให้ P เป็นจุดใด ๆ บน ΔABC แล้วจะมีจุด P' เป็นจุดที่สมนัยบน $\Delta A'B'C'$ และ $\overline{PP'}$ จะขนานและยาวเท่ากับ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ในทำนองเดียวกัน อาจกล่าวได้ว่าจุดทุกจุดบน $\Delta A'B'C'$ อยู่ห่างจากจุดทุกจุดที่สมนัยกันจุดต่อจุดไปทางซ้าย 4 หน่วย และขึ้นไปด้านบน 3 หน่วย ของ ΔABC

+ คณิตน่ารู้

การเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกัน แต่จะคู่จะขนานกันและยาวเท่ากัน

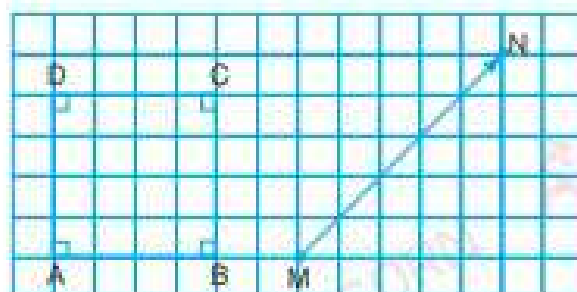
+ คณิตน่ารู้

การบอกทิศทางและระยะทางของการเลื่อนขนาน จะใช้เวกเตอร์เป็นตัวกำหนด จากรูปที่ 6 ใช้เวกเตอร์ $\overline{MN}$ เพื่อบอกทิศทางและระยะของการเลื่อนขนาน โดยมี M เป็นจุดเริ่มต้น N เป็นจุดสิ้นสุด และมี $\overline{MN}$ เป็นระยะของการเลื่อนขนาน เขียนแทนเวกเตอร์ $\overline{MN}$ ด้วยสัญลักษณ์ $\overline{MN}$ และสามารถสรุปได้ว่า

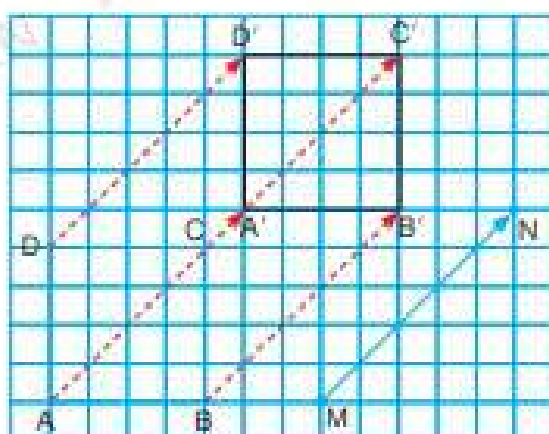
- 1) $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'} \parallel \overline{PP'} \parallel \overline{MN}$
- 2) $AA' = BB' = CC' = PP' = MN$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปตันแบบ จงสร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตาม $\overrightarrow{MN}$



วิธีทำ การเลื่อนขนานจะมีส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกัน แต่ละคู่ขนานกัน และยาวเท่ากัน หากจุด A', จุด B', จุด C' และจุด D' ซึ่งเป็นจุดที่สมนัยโดยลากเส้นประ AA', BB', CC' และ DD' ให้ขนานกับ $\overrightarrow{MN}$ ซึ่ง $AA' = BB' = CC' = DD' = MN$ แล้วลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ และ $\overline{D'A'}$



คุณิณนำรู้

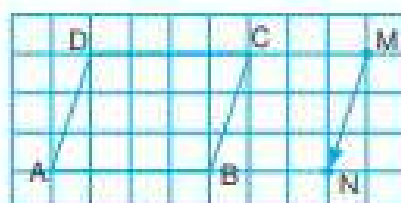
รูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม A'B'C'D' มีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน กล่าวได้ว่า รูปสี่เหลี่ยม ABCD และรูปสี่เหลี่ยม A'B'C'D' เท่ากันทุกประการ

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม A'B'C'D' เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตามเวกเตอร์ MN

ตอบ

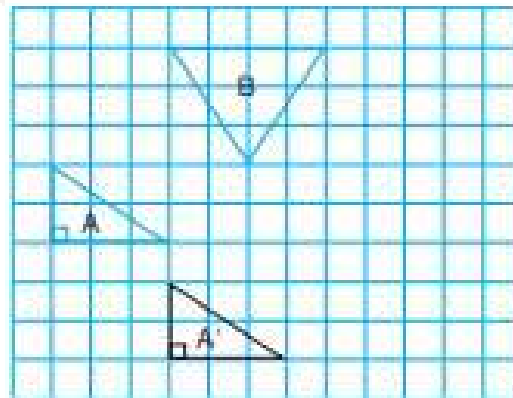


กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปตันแบบ จงสร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตาม $\overrightarrow{MN}$

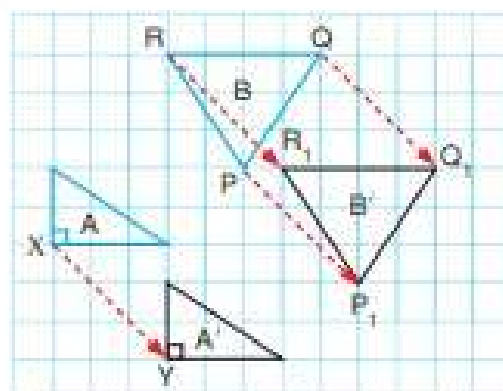


ตัวอย่างที่ 2

กำหนดรูปสามเหลี่ยม A เป็นรูปต้นแบบซึ่งเลื่อนขนานไปเป็นรูปสามเหลี่ยม A' จงสร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม B ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ โดยมีระยะทางและทิศทางเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยม A และรูปสามเหลี่ยม A'



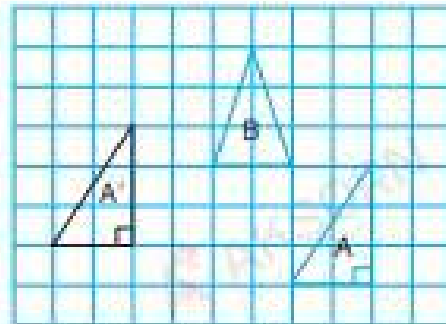
วิธีทำ หาเวกเตอร์ที่ใช้ในการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม A และ A' โดยเลือกจุดที่สมนัยกันระหว่างรูปสามเหลี่ยม A กับรูปสามเหลี่ยม A' หนึ่งคู่ ในที่นี้เลือกจุด X และจุด Y ลาก $\overrightarrow{XY}$ จะได้ทิศทางและระยะทางที่เลื่อนขนาน
จากรูปสามเหลี่ยม B ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ กำหนดให้ P , Q และ R เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม B ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ
ที่จุด P , จุด Q และจุด R ลากเส้นประให้ขนานกับ $\overrightarrow{XY}$ และมีความยาวเท่ากับ $\overrightarrow{XY}$ จะได้จุด P_1 , จุด Q_1 และจุด R_1 ซึ่งเป็นจุดที่สมนัยกับจุด P , จุด Q และจุด R ตามลำดับ
ลาก $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$ และ $\overline{R_1P_1}$ จะได้รูปสามเหลี่ยม $P_1Q_1R_1$



ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม $P_1Q_1R_1$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม B ในทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{XY}$ และห่างกันเป็นระยะทางเท่ากับ XY ตอบ

ลองทำดู

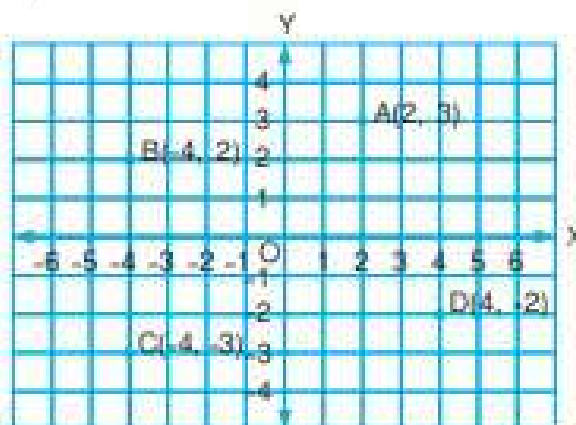
กำหนดรูปสามเหลี่ยม A เป็นรูปต้นแบบซึ่งเลื่อนขนานไปเป็นรูปสามเหลี่ยม A' จงสร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม B ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ โดยมีระยะทางและทิศทางเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยม A และรูปสามเหลี่ยม A'



ตัวอย่างที่ 3

จงหาพิกัดของจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A, จุด B, จุด C และจุด D ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ

- 1) เลื่อนจุด A(2, 3) ขนานกับแกน X ไปทางขวา 4 หน่วย
- 2) เลื่อนจุด B(-4, 2) ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย 2 หน่วย
- 3) เลื่อนจุด C(-4, -3) ขนานกับแกน Y ขึ้นไปด้านบน 4 หน่วย
- 4) เลื่อนจุด D(4, -2) ขนานกับแกน Y ลงมาด้านล่าง 2 หน่วย



💡 คณิตน่ารู้

สำหรับระบบพิกัดฉาก จุดที่แกน X และแกน Y ตัดกัน เรียกว่า จุดกำเนิด (origin) เขียนแทนด้วย O ซึ่งเป็นจุดที่มีพิกัด (0, 0)

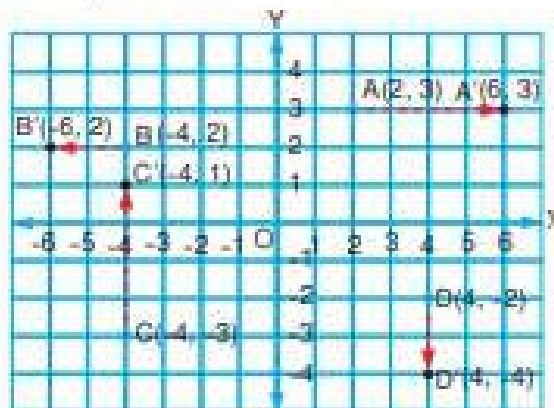
- วิธีทำ
- 1) สร้างจุด A' ที่เกิดจากการเลื่อนจุด A(2, 3) ให้ขนานกับแกน X ไปทางขวา 4 หน่วย
จะได้ว่า พิกัดของจุด A' คือ A'(6, 3)
 - 2) สร้างจุด B' ที่เกิดจากการเลื่อนจุด B(-4, 2) ให้ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย 2 หน่วย
จะได้ว่า พิกัดของจุด B' คือ B'(-6, 2)

- 3) สร้างจุด C' ที่เกิดจากการเลื่อนจุด $C(-4, -3)$ ให้ขนานกับแกน Y ขึ้นไปด้านบน 4 หน่วย

จะได้ว่า พิกัดของจุด C' คือ $C'(-4, 1)$

- 4) สร้างจุด D' ที่เกิดจากการเลื่อนจุด $D(4, -2)$ ให้ขนานกับแกน Y ลงมาด้านล่าง 2 หน่วย

จะได้ว่า พิกัดของจุด D' คือ $D'(4, -4)$



ตอบ



จงหาพิกัดของจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A, จุด B, จุด C, และจุด D ซึ่งเป็นรูปด้นแบบ

- 1) เลื่อนจุด $A(1, 4)$ ขนานกับแกน X ไปทางขวา 3 หน่วย
- 2) เลื่อนจุด $B(-2, 3)$ ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย 5 หน่วย
- 3) เลื่อนจุด $C(-3, -2)$ ขนานกับแกน Y ขึ้นไปด้านบน 4 หน่วย
- 4) เลื่อนจุด $D(5, -1)$ ขนานกับแกน Y ลงมาด้านล่าง 2 หน่วย

จากตัวอย่างที่ 3 จะพบว่า

1) ภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกับแกน X ไปทางขวา 4 หน่วย ทำให้ค่าของพิกัดที่หนึ่ง ^①ของจุด A เพิ่มขึ้น 4 หน่วย และในขณะเดียวกันถ้าเลื่อนขนานกับแกน X ไปทางซ้าย 2 หน่วย ทำให้ค่าของพิกัดที่หนึ่งของจุด B ลดลง 2 หน่วย

2) ภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานกับแกน Y ขึ้นไปด้านบน 4 หน่วย ทำให้ค่าของพิกัดที่สองของจุด C เพิ่มขึ้น 4 หน่วย และในขณะเดียวกันถ้าเลื่อนขนานกับแกน Y ลงมาด้านล่าง 2 หน่วย ทำให้ค่าของพิกัดที่สองของจุด D ลดลง 2 หน่วย

กำหนดให้ $A(x, y)$ เป็นรูปต้นแบบ และ $a > 0, b > 0$

เมื่อเลื่อนขนานตามแกน X ไปทางขวา a หน่วย จะได้ $A'(x + a, y)$

เมื่อเลื่อนขนานตามแกน X ไปทางซ้าย a หน่วย จะได้ $A'(x - a, y)$

เมื่อเลื่อนขนานตามแกน Y ขึ้นไปด้านบน b หน่วย จะได้ $A'(x, y + b)$

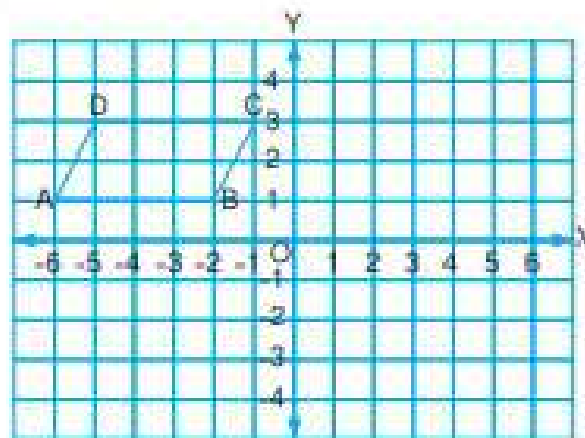
เมื่อเลื่อนขนานตามแกน Y ลงมาด้านล่าง b หน่วย จะได้ $A'(x, y - b)$

เมื่อ A' เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปต้นแบบ โดยมี $A(-6, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, 3)$ และ $D(-5, 3)$ เป็นจุดยอดมุม จงสร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

- 1) ขนานกับแกน X ไปทางขวา 7 หน่วย
- 2) ขนานกับแกน Y ลงมาด้านล่าง 5 หน่วย



วิธีทำ 1) สร้างจุด A_1 , จุด B_1 , จุด C_1 และ จุด D_1 ที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A, จุด B, จุด C และ จุด D ตามแนวแกน X ไปทางขวา 7 หน่วย
จะเห็นว่า ค่าของพิกัดที่สองคงเดิม ส่วนค่าของพิกัดที่หนึ่งของทุกจุดจะเพิ่มขึ้น
จุดละ 7 หน่วย

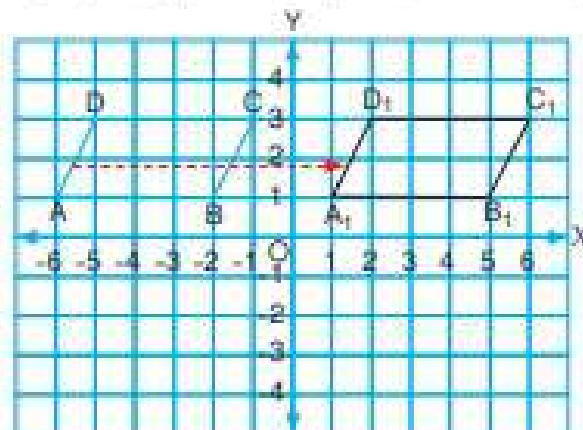
จะได้ พิกัดของจุด A_1 คือ $(-6 + 7, 1) = (1, 1)$

พิกัดของจุด B_1 คือ $(-2 + 7, 1) = (5, 1)$

พิกัดของจุด C_1 คือ $(-1 + 7, 3) = (6, 3)$

พิกัดของจุด D_1 คือ $(-5 + 7, 3) = (2, 3)$

ลาก $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$ และ $\overline{D_1A_1}$ จะได้รูปสี่เหลี่ยม $A_1B_1C_1D_1$ ดังรูป



ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $A_1B_1C_1D_1$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน
รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตามแนวแกน X ไปทางขวา 7 หน่วย

- 2) สร้างจุด A_2 , จุด B_2 , จุด C_2 และ จุด D_2 ที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A , จุด B , จุด C และจุด D ตามแนวแกน Y ลงมาด้านล่าง 5 หน่วย
จะเห็นว่า ค่าของพิกัดที่หนึ่งคงเดิม ส่วนค่าของพิกัดที่สองของทุกจุดจะลดลง
จุดละ 5 หน่วย

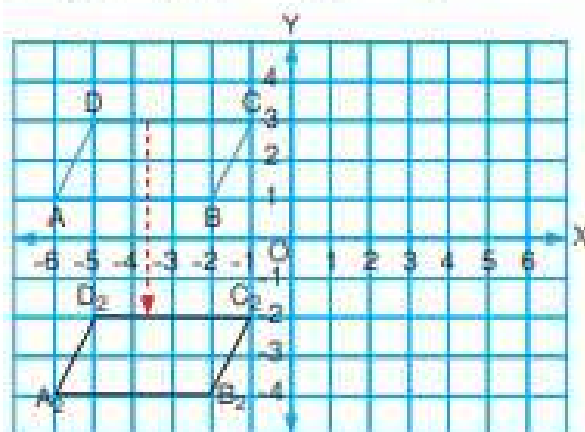
จะได้ พิกัดของจุด A_2 คือ $(-6, 1 - 5) = (-6, -4)$

พิกัดของจุด B_2 คือ $(-2, 1 - 5) = (-2, -4)$

พิกัดของจุด C_2 คือ $(-1, 3 - 5) = (-1, -2)$

พิกัดของจุด D_2 คือ $(-5, 3 - 5) = (-5, -2)$

ลาก $\overline{A_2B_2}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2D_2}$ และ $\overline{D_2A_2}$ จะได้รูปสี่เหลี่ยม $A_2B_2C_2D_2$ ดังรูป



ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $A_2B_2C_2D_2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน
รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตามแนวแกน Y ลงมาด้านล่าง 5 หน่วย

ตอบ



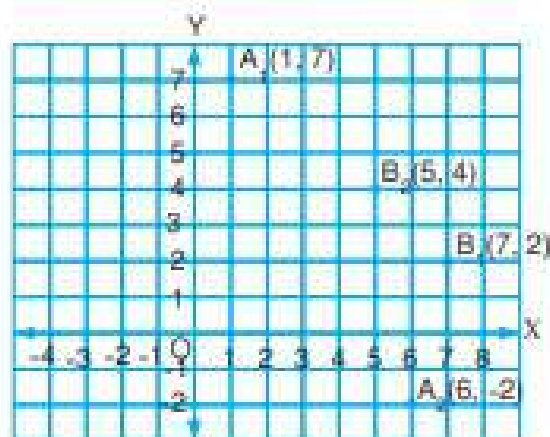
กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปคั่นแบบ โดยมี $A(2, -2)$, $B(4, -2)$, $C(5, -4)$ และ $D(3, -4)$ เป็นจุดยอดมุม จงสร้างภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตามเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้

- 1) ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย 6 หน่วย
- 2) ขนานกับแกน Y ขึ้นไปด้านบน 5 หน่วย

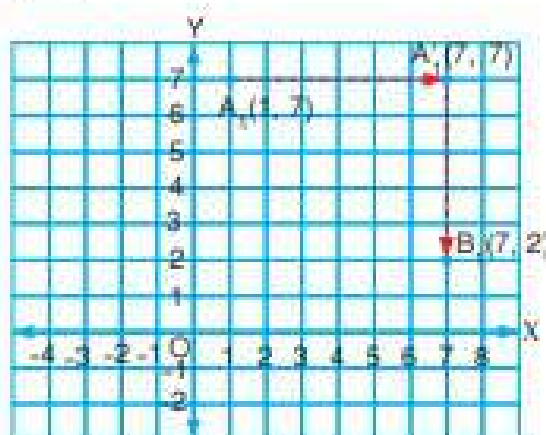
ตัวอย่างที่ 5

จงอธิบายการจับคู่ระหว่างจุดที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

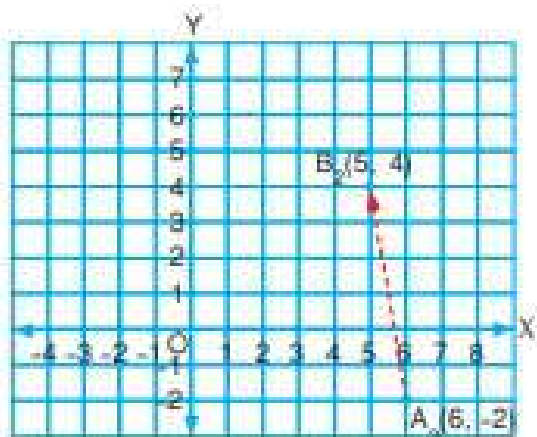
- 1) จุด $A_1(1, 7)$ กับจุด $B_1(7, 2)$ โดยจุด A_1 เป็นรูปคั่นแบบ และจุด B_1 เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน
- 2) จุด $A_2(6, -2)$ กับจุด $B_2(5, 4)$ โดยจุด A_2 เป็นรูปคั่นแบบ และจุด B_2 เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน



วิธีทำ 1) จากจุด $A_1(1, 7)$ ซึ่งเป็นรูปคั่นแบบ เลื่อนตามแนวแกน X ไปทางขวา 6 หน่วย ได้จุด $A'_1(7, 7)$ และจากจุด $A'_1(7, 7)$ เลื่อนตามแนวแกน Y ลงมาด้านล่าง 5 หน่วย ได้จุด $B_1(7, 2)$



- 2) หาเวกเตอร์ที่ใช้ในการเลื่อนจุด $A_2(6, -2)$ ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ และจุด $B_2(5, 4)$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน โดยลาก $\overline{A_2B_2}$ จะได้ทิศทางและระยะทางที่เลื่อนขนาน จากนั้นเลื่อนจุด $A_2(6, -2)$ ซึ่งเป็นรูปต้นแบบไปในทิศทางเดียวกับ $\overline{A_2B_2}$ เป็นระยะทางเท่ากับ A_2B_2 จะได้จุด $B_2(5, 4)$



ตอบ

ลองทำ

อธิบายการจับคู่ระหว่างจุดที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

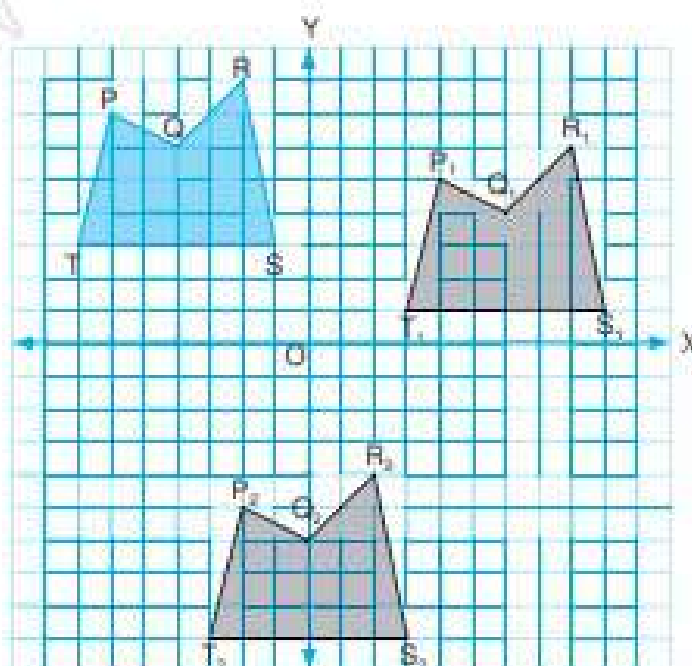
- จุด $A_1(-4, 5)$ กับจุด $B_1(2, -2)$ โดยจุด A_1 เป็นรูปต้นแบบ และจุด B_1 เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน
- จุด $A_2(5, -1)$ กับจุด $B_2(-2, 6)$ โดยจุด A_2 เป็นรูปต้นแบบ และจุด B_2 เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน

Thinking Time

ยังมีวิธีที่ใช้อธิบายการจับคู่ระหว่างจุดวิธีอื่นอีกหรือไม่ ถ้ามีสามารถทำได้อย่างไร

ตัวอย่างที่ 6

จงอธิบายการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบ PQIRST เพื่อให้ได้รูป $P_1Q_1R_1S_1T_1$ และ $P_2Q_2R_2S_2T_2$ ดังรูปที่กำหนดให้



วิธีทำ การเลื่อนขนานรูป PQRS เพื่อให้ได้รูป $P_1Q_1R_1S_1T_1$ จะเลื่อนขนานสองครั้ง ดังนี้

ครั้งที่ 1 เลื่อนตามแนวแกน X ไปทางขวาเป็นระยะทาง 10 หน่วย

ครั้งที่ 2 เลื่อนตามแนวแกน Y ลงมาด้านล่างเป็นระยะทางอีก 2 หน่วย

จะได้รูป $P_1Q_1R_1S_1T_1$ ที่ได้จากการเลื่อนขนานรูป PQRS ตามต้องการ

ส่วนรูป $P_2Q_2R_2S_2T_2$ ได้จากการเลื่อนขนานสองครั้งเช่นกัน ดังนี้

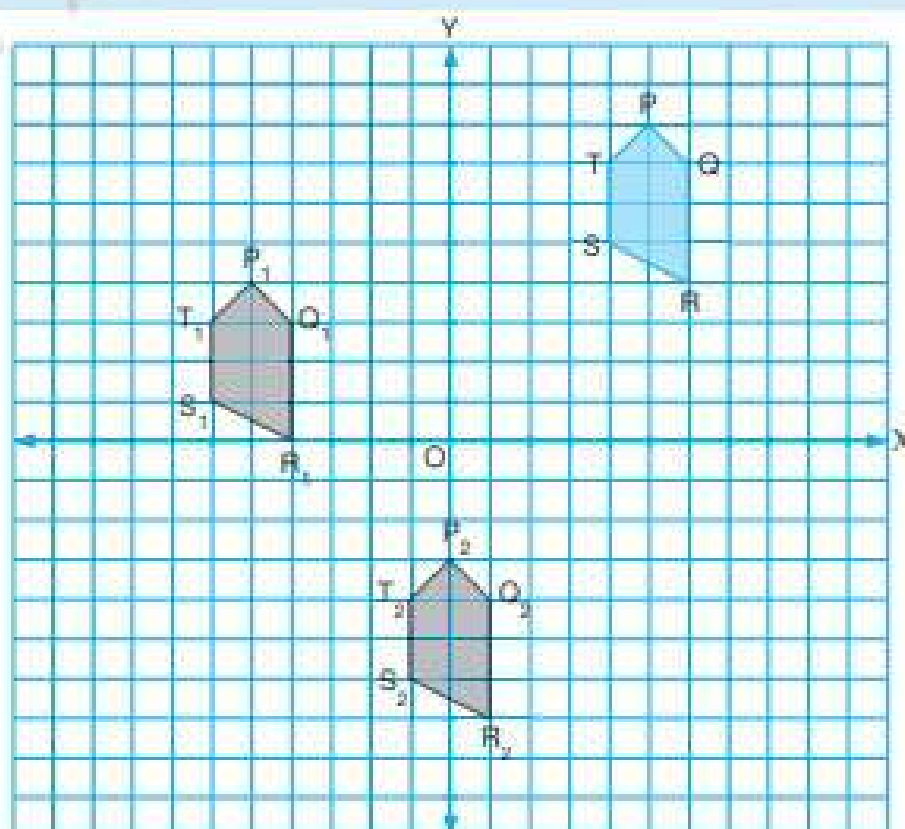
ครั้งที่ 1 เลื่อนตามแนวแกน Y ลงมาด้านล่างเป็นระยะทาง 12 หน่วย

ครั้งที่ 2 เลื่อนตามแนวแกน X ไปทางขวาเป็นระยะทางอีก 4 หน่วย

จะได้รูป $P_2Q_2R_2S_2T_2$ ที่ได้จากการเลื่อนขนานรูป PQRS ตามต้องการ **ตอบ**



จงอธิบายการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบ PQRS เพื่อให้ได้รูป $P_1Q_1R_1S_1T_1$ และ $P_2Q_2R_2S_2T_2$ ดังรูปที่กำหนดให้



2. การสะท้อน

พิจารณาภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้

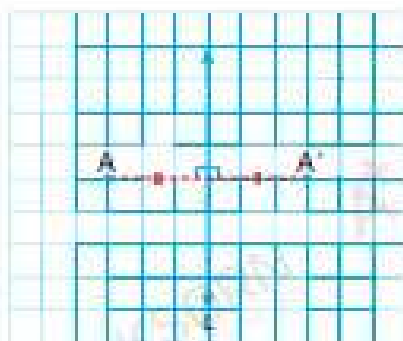


ที่มา: คลังภาพ อจท.

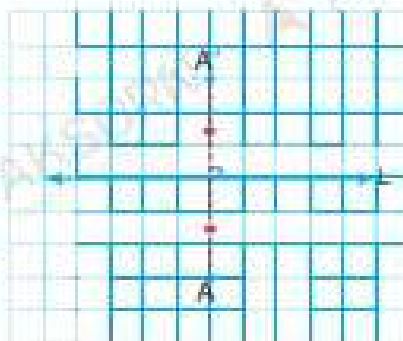
จากภาพจะเห็นว่า ภาพที่สะท้อนบนผิวน้ำนั้นเกิดจากโบราณสถานที่เป็นรูปต้นแบบ โดยมีสระน้ำเป็นเสมือนกระจกและแนวระดับผิวน้ำของสระน้ำเป็นเสมือน เส้นสะท้อน (line of reflection) ดังนั้น จึงเรียกภาพที่สะท้อนบนผิวน้ำว่า ภาพที่ได้จากการสะท้อน

การสะท้อนรูปเรขาคณิตบนระนาบ

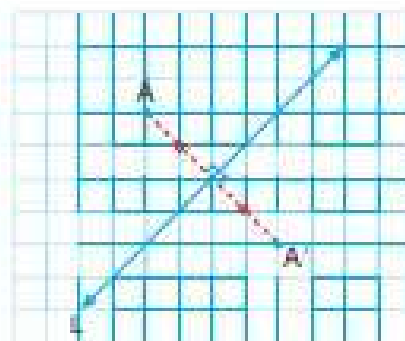
พิจารณาจุด A' ที่เกิดจากการสะท้อนจุด A โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



รูปที่ 7



รูปที่ 8



รูปที่ 9

จากรูปที่ 7, 8 และ 9 จะพบว่า

- 1) จุด A และจุด A' เป็นจุดที่สมมาตรกัน โดยจะเห็นว่าจุด A และจุด A' มีระยะห่างจากเส้นตรง L ซึ่งเป็นเส้นสะท้อนเท่ากัน
- 2) เส้นตรง L ตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$
- 3) เมื่อพับรูปโดยให้เส้นตรง L เป็นรอยพับ จะพบว่าจุด A และจุด A' พับกันพอดี ซึ่งเป็นไปตามบทนิยาม ดังนี้

Thinking Time

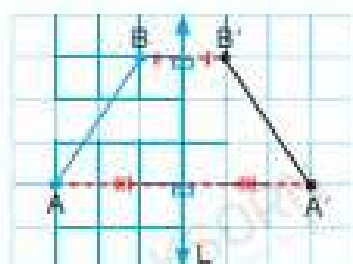
เมื่อนักเรียนมองตนเองผ่านกระจกเงา จะพบว่า มีหน้าของตนเองปรากฏอยู่บนกระจก ซึ่งมีรูปร่างเหมือนจริง และมีขนาดเท่าตัวจริง นักเรียนคิดว่า การสะท้อนนี้มีเส้นสะท้อนอยู่บริเวณใด

บทนิยาม

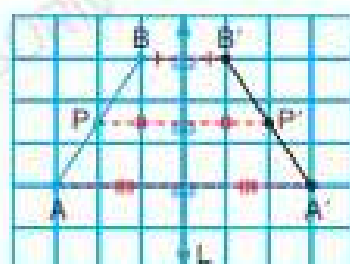
1

การสะท้อนบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการจับคู่ระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ ซึ่งเป็นจุดที่สมนัยกัน คือ จุดบนรูปต้นแบบกับจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน โดยมีเส้นตรงเส้นหนึ่ง เรียกว่าเส้นสะท้อน ซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากส่วนของเส้นตรงที่มีจุดคู่ที่สมนัยกันเป็นจุดปลาย

พิจารณา $\overline{A'B'}$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\overline{AB}$ ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ โดยที่เส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน



รูปที่ 10



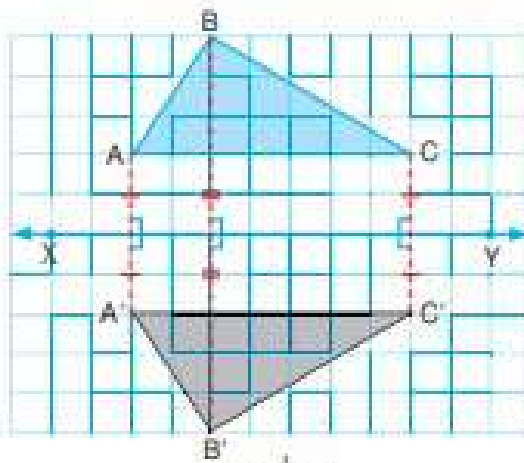
รูปที่ 11

จากรูปที่ 10 จะพบว่า

- 1) จุด A' กับจุด A เป็นจุดที่สมนัยกัน และห่างจากเส้นตรง L เป็นระยะ 3 หน่วยเท่ากัน
จุด B' กับจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน และห่างจากเส้นตรง L เป็นระยะ 1 หน่วยเท่ากัน
- 2) เส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$
เส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{BB'}$
- 3) $\overline{BB'}$ ขนานกับ $\overline{AA'}$ ซึ่งกล่าวได้ว่า ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดคู่ที่สมนัยกันเป็นจุดปลายทุกเส้นจะขนาน

จากรูปที่ 11 ถ้าจุด P เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{AB}$ แล้วจะมีจุด P' บน $\overline{A'B'}$ ซึ่งเป็นจุดที่สมนัยกับจุด P และเส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$ ด้วย ซึ่งกล่าวได้ว่า เส้นตรง L จะเป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดที่สมนัยกันแต่ละคู่ของ $\overline{AB}$ และ $\overline{A'B'}$ และเมื่อพับรูปโดยใช้เส้นตรง L เป็นรอยพับ จะพบว่า $\overline{A'B'}$ และ $\overline{AB}$ จะทับกันสนิท

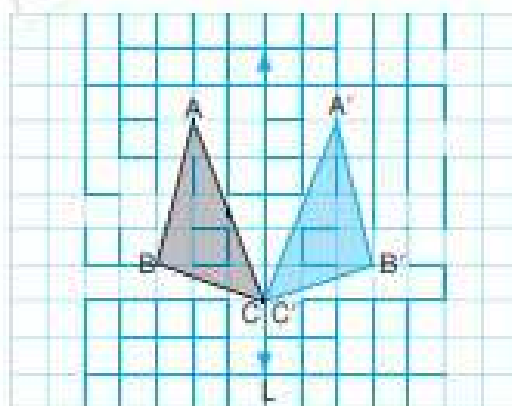
พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ เมื่อสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วยเส้นสะท้อน XY และได้รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12

จากรูปที่ 12 จะพบว่า

- 1) จุด A' กับจุด A เป็นจุดที่สมนัยกัน และห่างจาก $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นระยะ 2 หน่วยเท่ากัน
จุด B' กับจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน และห่างจาก $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นระยะ 5 หน่วยเท่ากัน
จุด C' กับจุด C เป็นจุดที่สมนัยกัน และห่างจาก $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นระยะ 2 หน่วยเท่ากัน
- 2) $\overleftrightarrow{XY}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$
 $\overleftrightarrow{XY}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{BB'}$
 $\overleftrightarrow{XY}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{CC'}$
- 3) $\overline{AA'}$ ขนานกับ $\overline{BB'}$ ขนานกับ $\overline{CC'}$
- 4) เมื่อพับรูปโดยใช้ $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นรอยพับ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ จะทับรูปสามเหลี่ยม ABC สนิทพอดี แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม ABC พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ เมื่อสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วยเส้นสะท้อน L และได้รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13

💡 คณิตน่ารู้

จุดคู่ที่สมนัยกันแต่ละคู่ ซึ่งมีระยะห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน จะอยู่คนละด้านของเส้นสะท้อน หรือกล่าวได้ว่า จุดคู่ที่สมนัยกันมีทิศกลับกัน

🧐 Thinking Time



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ และเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน ภาพที่ได้จากการสะท้อนจะเป็นอย่างไร

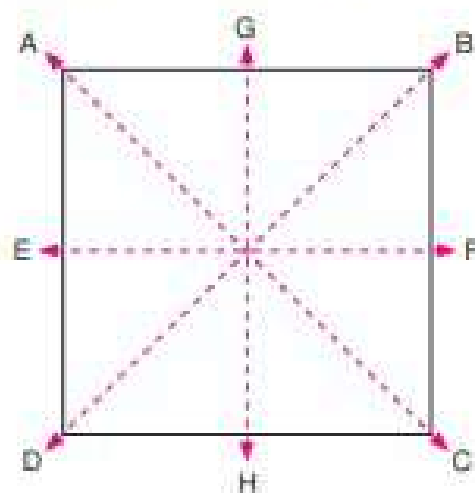
จากรูปที่ 13 จะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยมด้วยเส้นสะท้อน L ซึ่งรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ กล่าวคือ $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ และ $CA = C'A'$

จุด A และจุด A' มีระยะห่างจากเส้นสะท้อน L เท่ากัน เรียกจุด A และจุด A' ว่าเป็นจุดที่สมนัยกัน ทำนองเดียวกัน เรียกจุด B' และจุด C' ว่าเป็นจุดสมนัยของจุด B และจุด C ตามลำดับ จุด C ซึ่งเป็นรูปต้นแบบอยู่บนเส้นสะท้อน ดังนั้น จุด C และจุด C' จึงเป็นจุดเดียวกัน

การสะท้อน

- 1) ภาพที่ได้จากการสะท้อนมีขนาดและลักษณะเหมือนรูปต้นแบบแต่ทิศทางกลับกันกับรูปต้นแบบ
- 2) จุดแต่ละจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อนกับจุดบนรูปต้นแบบที่สมนัยกัน จะห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน กล่าวได้ว่า เส้นสะท้อนแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดคู่ที่สมนัยกันเป็นจุดปลาย
- 3) เมื่อมีจุดบางจุดบนรูปต้นแบบอยู่บนเส้นสะท้อน จุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อน จะเป็นจุดเดียวกัน
- 4) ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดคู่ที่สมนัยกันเป็นจุดปลายทุกเส้นขนานกัน

นักเรียนเคยรู้จักรูปสมมาตรและแกนสมมาตรของรูปเรขาคณิตมาแล้วว่ารูปเรขาคณิตที่สามารถหารอยพับและพับรูปทั้งสองข้างของรอยพับให้ทับกันสนิท เรียกว่า รูปสมมาตรบนเส้น และเรียกรอยพับว่า แกนสมมาตร (axis of symmetry) เช่น



รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสมมาตรบนเส้นที่มีแกนสมมาตร 4 แกน ได้แก่ $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ และ $\overleftrightarrow{GH}$

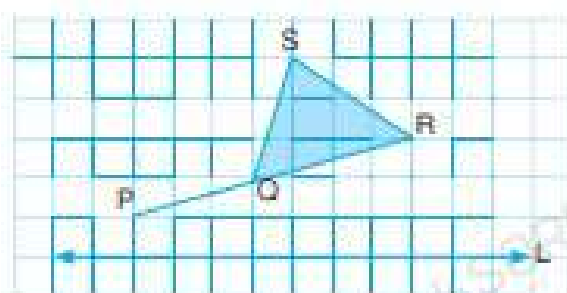
จากรูปจะเห็นว่า ถ้าให้รูปสามเหลี่ยม ABD เป็นรูปต้นแบบ จะได้รูปสามเหลี่ยม CBD เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน โดยมี $\overleftrightarrow{BD}$ เป็นเส้นสะท้อน

ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยม ABFE เป็นรูปต้นแบบ จะได้รูปสี่เหลี่ยม DCFE เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน โดยมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นสะท้อน

รูปสมมาตรบนเส้นเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน โดยมีแกนสมมาตรเป็นเส้นสะท้อน

ตัวอย่างที่ 7

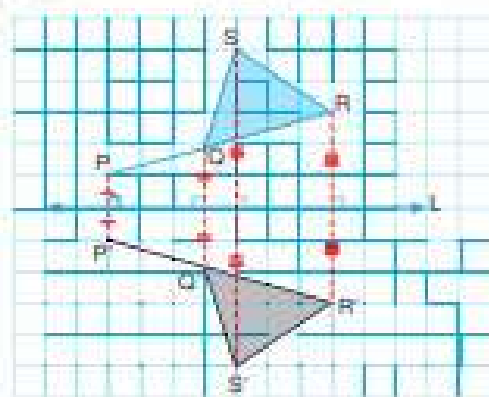
จงสร้างภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ PQSR โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน



วิธีทำ จากจุด P ลากเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง L แล้วต่อออกไปถึงจุด P' โดยให้เส้นตรง L แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$

ในทำนองเดียวกัน จากจุด Q, จุด S และจุด R ลากเส้นตั้งฉากกับเส้นตรง L แล้วต่อออกไปถึงจุด Q', จุด S' และจุด R' ตามลำดับ โดยให้เส้นตรง L แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง $\overline{QQ'}$, $\overline{SS'}$ และ $\overline{RR'}$

จากนั้นลาก $\overline{P'Q'}$, $\overline{Q'S'}$, $\overline{S'R'}$ และ $\overline{R'Q'}$ จะได้รูป P'Q'S'R'

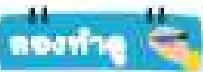


ดังนั้น รูป P'Q'S'R' เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ PQSR โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน

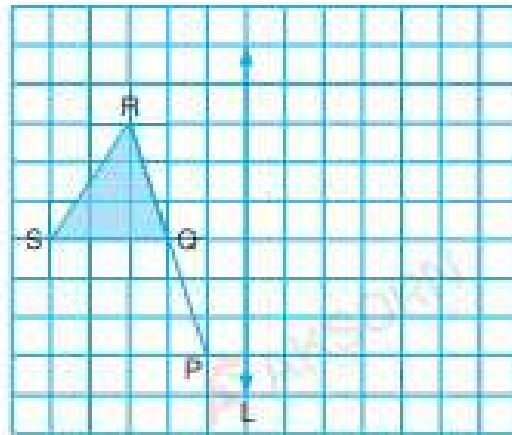
ตอบ

Thinking Time

รูป PQSR กับรูป P'Q'S'R' เป็นรูปที่สมมาตรกันหรือไม่ ถ้าเป็นรูปที่สมมาตรกันแล้ว มีแกนสมมาตรอยู่ที่ใด



จงสร้างภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ PQSR โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน

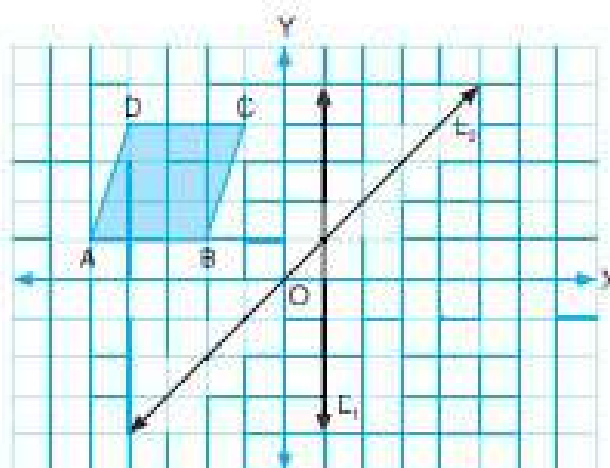


จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการสะท้อนบนระนาบ ซึ่งสามารถใช้หลักการเดียวกันนี้ในการสะท้อนบนระนาบในระบบพิกัดฉาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8

จงสร้างภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ ABCD โดยมีเส้นสะท้อนต่างๆ ดังนี้

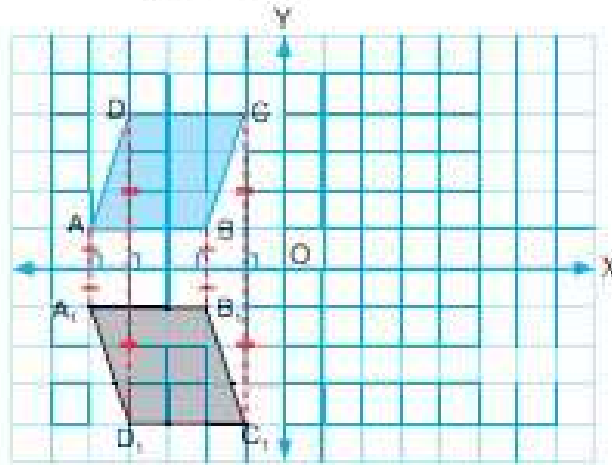
- 1) แกน X
- 2) แกน Y
- 3) เส้นตรง L_1
- 4) เส้นตรง L_2



การสะท้อน

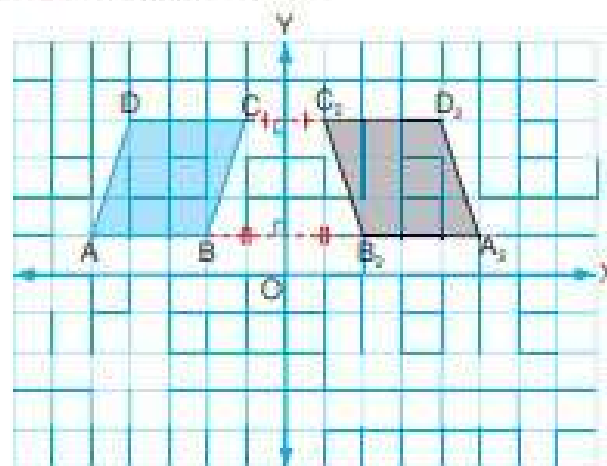


- วิธีทำ 1) จากจุด A, จุด B, จุด C และจุด D สร้างจุด A_1 , จุด B_1 , จุด C_1 และ จุด D_1 ให้ระยะห่างของจุดทุกจุดที่สมนัยกันห่างจากแกน X เป็นระยะเท่ากัน แล้วลาก $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$ และ $\overline{D_1A_1}$ จะได้ รูปสี่เหลี่ยม $A_1B_1C_1D_1$ ดังรูป



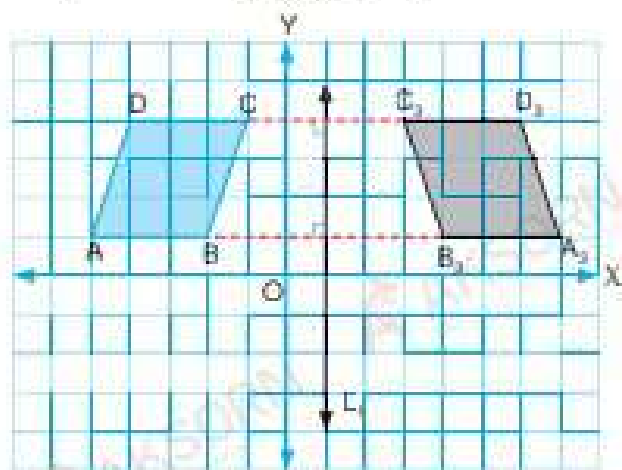
ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $A_1B_1C_1D_1$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ ABCD โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

- 2) จากจุด A, จุด B, จุด C และจุด D สร้างจุด A_2 , จุด B_2 , จุด C_2 และจุด D_2 ให้ระยะห่างของจุดทุกจุดที่สมนัยกันห่างจากแกน Y เป็นระยะเท่ากัน แล้ว $\overline{A_2B_2}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2D_2}$ และ $\overline{D_2A_2}$ จะได้ รูปสี่เหลี่ยม $A_2B_2C_2D_2$ ดังรูป



ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $A_2B_2C_2D_2$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ ABCD โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

- 3) จากจุด A, จุด B, จุด C และจุด D สร้างจุด A_3 , จุด B_3 , จุด C_3 และจุด D_3 ให้ระยะห่างของจุดทุกจุดที่สมนัยกันกับรูปต้นแบบ ABCD ห่างจากเส้นตรง L_1 เป็นระยะเท่ากัน แล้วลาก $\overline{A_3B_3}$, $\overline{B_3C_3}$, $\overline{C_3D_3}$ และ $\overline{D_3A_3}$ จะได้รูปสี่เหลี่ยม $A_3B_3C_3D_3$ ดังรูป

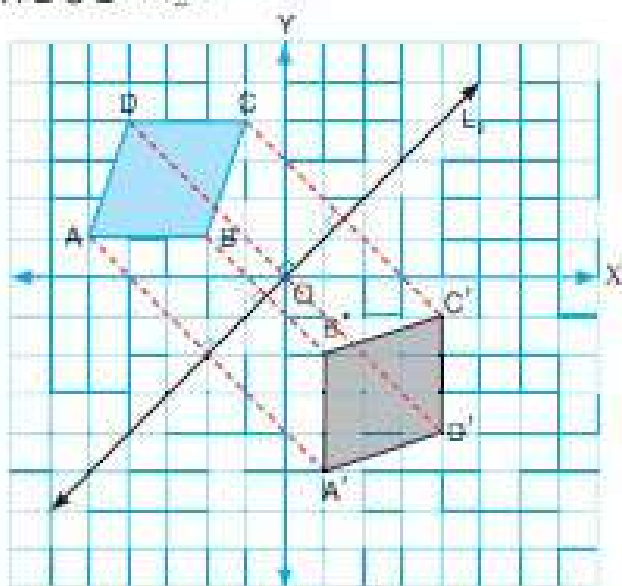


💡 คณิตน่ารู้

จุดแต่ละจุดที่ได้จากการสะท้อนกับจุดบนรูปต้นแบบที่สมนัยกันจะห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $A_3B_3C_3D_3$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ ABCD โดยมีเส้นตรง L_1 เป็นเส้นสะท้อน

- 4) จากจุด A, จุด B, จุด C และจุด D สร้างจุด A' , จุด B' , จุด C' และจุด D' ให้ระยะห่างของจุดทุกจุดที่สมนัยกันกับรูปต้นแบบ ABCD ห่างจากเส้นตรง L_2 เป็นระยะเท่ากัน แล้วลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ และ $\overline{D'A'}$ จะได้รูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ ดังรูป



📌 แนะนำคิด

ถ้าเส้นสะท้อนไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y ให้ลากเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนดให้และตั้งฉากกับเส้นสะท้อน ภาพของจุดที่กำหนดให้ จะอยู่บนเส้นตั้งฉากที่สร้างขึ้น และอยู่ห่างจากเส้นสะท้อนเป็นระยะทางเท่ากับระยะห่างของจุดที่กำหนดให้กับเส้นสะท้อน

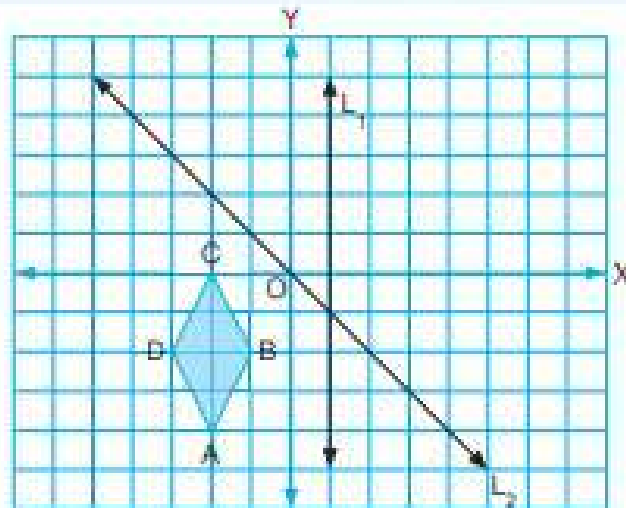
ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ ABCD โดยมีเส้นตรง L_2 เป็นเส้นสะท้อน

ตอบ



จงสร้างภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ ABCD โดยมีเส้นสะท้อนต่าง ๆ ดังนี้

- 1) แกน X
- 2) แกน Y
- 3) เส้นตรง L_1
- 4) เส้นตรง L_2

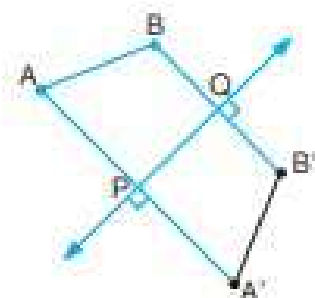


ในทางกลับกัน ถ้ามีรูปต้นแบบกับภาพที่ได้จากการสะท้อน จะสามารถหาเส้นสะท้อนได้ กำหนด $\overline{AB}$ และ $\overline{A'B'}$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน ดังรูป



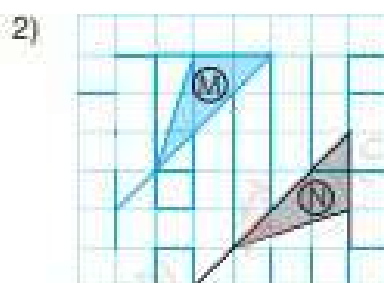
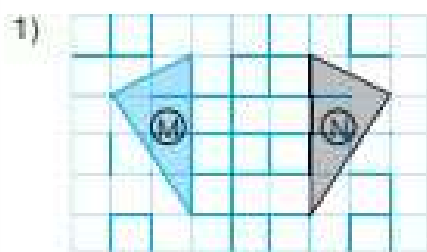
จากรูป สามารถหาเส้นสะท้อนได้ ดังนี้

1. ลาก $\overline{AA'}$ และ $\overline{BB'}$
2. สร้างจุด P และจุด Q ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AA'}$ และ $\overline{BB'}$ ตามลำดับ
3. ลาก $\overline{PQ}$
จะได้ $\overline{PQ}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$ และ $\overline{BB'}$
ดังนั้น $\overline{PQ}$ เป็นเส้นสะท้อนของ $\overline{AB}$ และ $\overline{A'B'}$

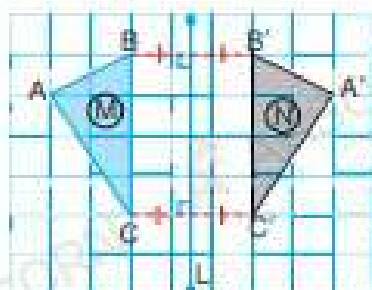


ตัวอย่างที่ 9

จงสร้างเส้นสะท้อนระหว่างรูปต้นแบบ (M) กับภาพที่ได้จากการสะท้อน (N) ในแต่ละข้อต่อไปนี้



วิธีทำ 1) ขั้นตอนการสร้างเส้นสะท้อน มีดังนี้



1. กำหนดจุด A, จุด B และจุด C บนรูป (M) และจุด A', จุด B' และจุด C' บนรูป (N) ซึ่งเป็นจุดคู่ที่สมนัยของจุด A, จุด B และจุด C ตามลำดับ
2. ลาก $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$
3. หาจุดกึ่งกลางของ $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$
4. ลากส่วนของเส้นตรง L ผ่านจุดกึ่งกลางของ $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ จะได้ส่วนของเส้นตรง L ตั้งฉากกับ $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$

ดังนั้น ส่วนของเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อนระหว่างรูปต้นแบบ (M) กับภาพที่ได้จากการสะท้อน (N)

2) ขั้นตอนการสร้างเส้นสะท้อน มีดังนี้



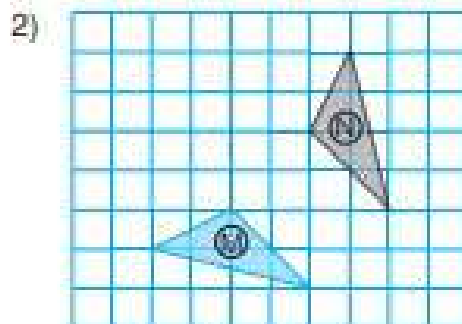
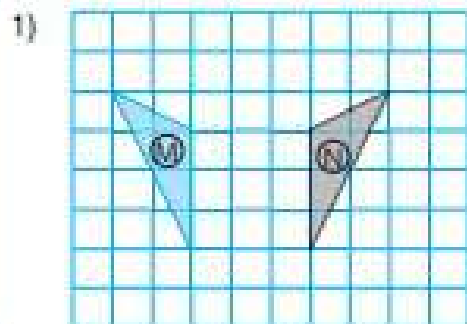
1. กำหนดจุด P, จุด Q และจุด R บนรูป (M) และจุด P', จุด Q' และจุด R' บนรูป (N) ซึ่งเป็นจุดคู่ที่สมนัยของจุด P, จุด Q และจุด R ตามลำดับ
2. ลาก $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ และ $\overline{RR'}$
3. หาจุดกึ่งกลางของ $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ และ $\overline{RR'}$
4. ลากส่วนของเส้นตรง m ผ่านจุดกึ่งกลางของ $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ และ $\overline{RR'}$ จะได้ส่วนของเส้นตรง m ตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ และ $\overline{RR'}$

ดังนั้น ส่วนของเส้นตรง m เป็นเส้นสะท้อนระหว่างรูปต้นแบบ (M) กับภาพที่ได้จากการสะท้อน (N)

ตอบ

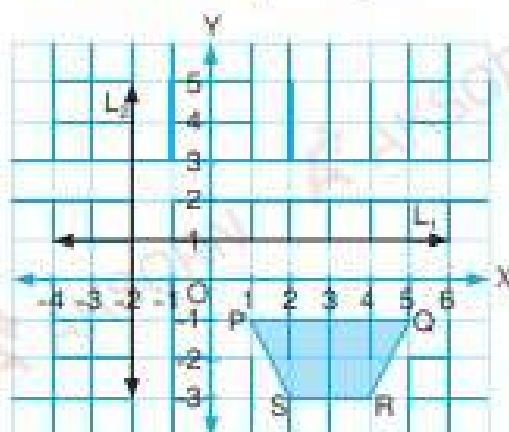


จงสร้างเส้นสะท้อนระหว่างรูปต้นแบบ M กับภาพที่ได้จากการสะท้อน N ในแต่ละข้อต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 10

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม PQRS และเส้นสะท้อน L_1 และ L_2 ดังนี้

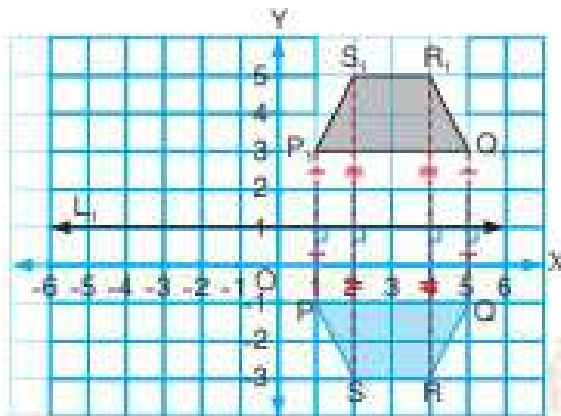


จงหาพิกัดของจุดที่เป็นจุดยอดของภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสี่เหลี่ยม PQRS โดยมีเส้นสะท้อนต่อไปนี้

1) เส้นตรง L_1

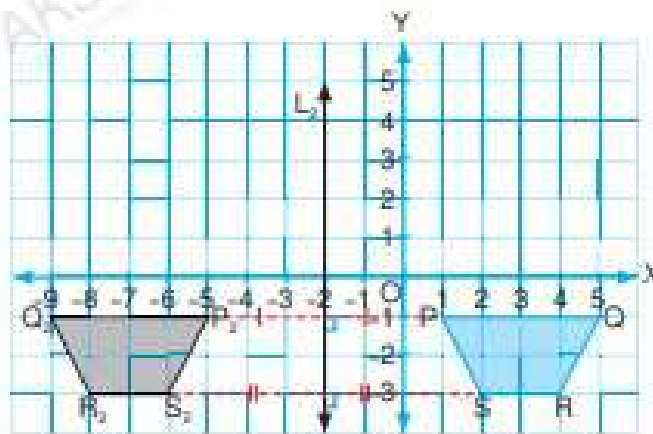
2) เส้นตรง L_2

วิธีทำ 1) เนื่องจากทุกจุดที่สมนัยกันระหว่างรูปต้นแบบกับภาพที่ได้จากการสะท้อน ห่างจากเส้นตรง L_1 เท่ากัน ดังนั้น จะสร้างภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสี่เหลี่ยม PQRS ได้ ดังรูป



ดังนั้น $P_1(1, 3)$, $Q_1(5, 3)$, $R_1(4, 5)$ และ $S_1(2, 5)$ เป็นจุดยอดของรูป $P_1Q_1R_1S_1$ ที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบ โดยมีเส้นตรง L_1 เป็นเส้นสะท้อน

- 2) ในทำนองเดียวกันกับ ข้อ 1) จะสร้างภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสี่เหลี่ยม PQRS โดยมีเส้นตรง L_2 เป็นเส้นสะท้อนได้ ดังรูป



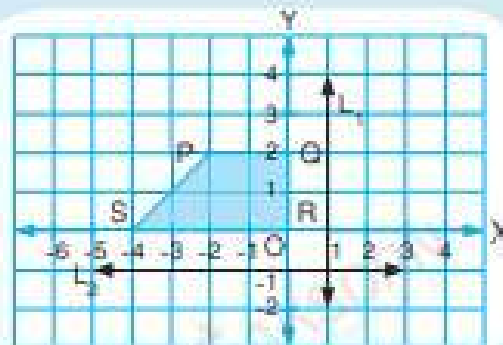
ดังนั้น $P_2(-5, -1)$, $Q_2(-9, -1)$, $R_2(-8, -3)$ และ $S_2(-6, -3)$ เป็นจุดยอดของรูป $P_2Q_2R_2S_2$ ที่ได้จากการสะท้อนโดยมีเส้นตรง L_2 เป็นเส้นสะท้อน ตอบ

ลองทำ

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม PQRS และเส้นสะท้อน L_1 และ L_2 ดังรูป

จงหาพิกัดของจุดที่เป็นจุดยอดของภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสี่เหลี่ยม PQRS โดยมีเส้นสะท้อนต่อไปนี้

- 1) เส้นตรง L_1 2) เส้นตรง L_2



3. การหมุน

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนเคยเห็นการหมุนของสิ่งต่าง ๆ เช่น การหมุนของเข็มนาฬิกา การหมุนของใบพัดพัดลม การคลี่พัด การแกว่งของชิงช้า การหมุนของกังหัน เป็นต้น

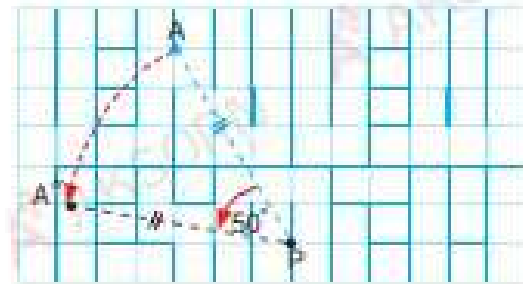
การหมุนเป็นการเคลื่อนที่โดยมีจุดยึดจุดหนึ่ง ซึ่งมีทิศทางของการหมุน 2 แบบ ได้แก่ ① การหมุนตามเข็มนาฬิกา และการหมุนทวนเข็มนาฬิกา และเรียกจุดยึดจุดหนึ่งว่า **จุดหมุน** (center of rotation)

การหมุนรูปเรขาคณิตบนระนาบ

กำหนดให้จุด A เป็นจุดบนระนาบและมีจุด P เป็นจุดหมุน หมุนจุด A ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90° จะได้จุด A' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด A ดังรูปที่ 14 และหมุนจุด A ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 50° จะได้จุด A'' เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด A ดังรูปที่ 15



รูปที่ 14



รูปที่ 15

จากรูปที่ 14 และ 15 จะพบว่า

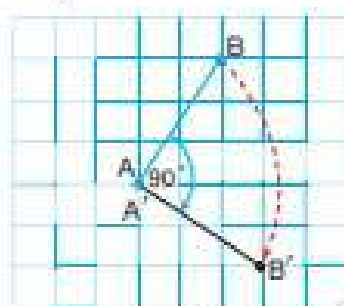
- 1) การเปลี่ยนตำแหน่งของจุด A จะได้ว่า ระยะห่างระหว่างจุด A กับจุด P เท่ากับ ระยะห่างระหว่างจุด A' กับจุด P และเท่ากับระยะห่างระหว่างจุด A'' กับจุด P กล่าวคือ $AP = A'P = A''P$
- 2) จุด A' เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนจุด A รอบจุด P จะได้ว่า $\angle APA' = 90^\circ$
จุด A'' เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนจุด A รอบจุด P จะได้ว่า $\angle APA'' = 50^\circ$

ซึ่งเป็นไปตามบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

การหมุนบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่เกิดจากการหมุนที่มีจุดคงที่จุดหนึ่ง เรียกว่า จุดหมุน โดยแต่ละจุดบนรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุนด้วยทิศทางตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกาและมีขนาดของมุมเท่ากันตามที่กำหนด จะได้จุดคู่ที่สมนัย ซึ่งจุดคู่ที่สมนัยกันแต่ละคู่จะมีระยะห่างจากจุดหมุนเท่ากัน

กำหนด $\overline{AB}$ บนระนาบ หมุน $\overline{AB}$ โดยมีจุด A เป็นจุดหมุน หมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นมุมที่มีขนาด 90° จะได้ $\overline{A'B'}$ ดังรูปที่ 16

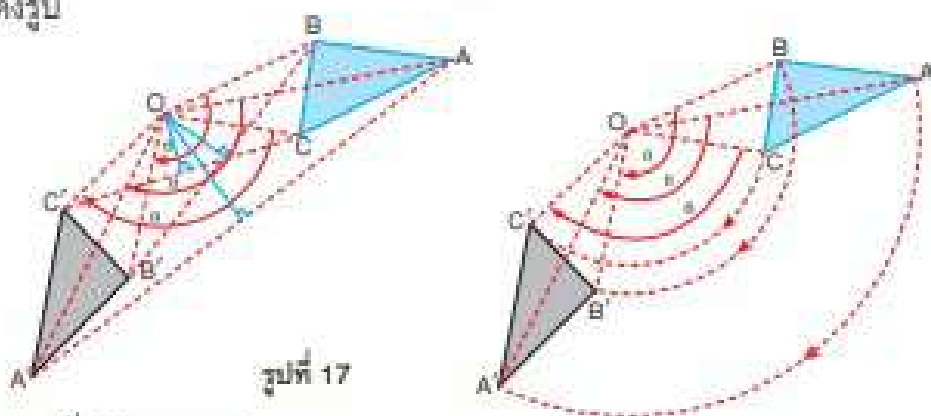


รูปที่ 16

จากรูปที่ 16 จะพบว่า

- 1) เนื่องจากจุด A ซึ่งเป็นจุดหมุนเป็นจุดปลายข้างหนึ่งของ $\overline{AB}$ ดังนั้น จุด A ไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่ง จึงกล่าวได้ว่าจุด A และจุด A' เป็นจุดที่สมนัยกัน และเป็นจุดเดียวกัน จุดอื่นๆ ทุกจุดบน $\overline{AB}$ มีการเปลี่ยนตำแหน่ง แต่ละจุดจึงมีจุดที่สมนัยและจุด B ซึ่งเป็นจุดปลายอีกข้างหนึ่ง จะมีจุด B' เป็นจุดที่สมนัย
- 2) $AB = A'B'$
- 3) $\angle BAB' = \angle B'A'B = 90^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบโดยมีจุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด θ องศา ดังรูป



รูปที่ 17

จากรูปที่ 17 จะพบว่า

- 1) รูปสามเหลี่ยม ABC มีขนาดและรูปร่างเท่ากับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$
- 2) $OA = OA'$, $OB = OB'$ และ $OC = OC'$
- 3) $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = \theta$

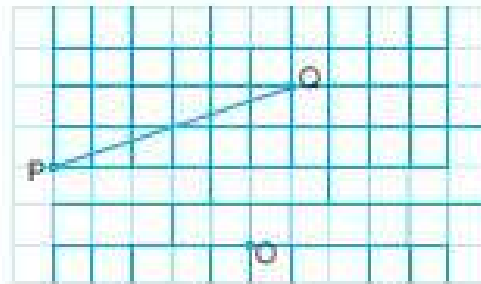


ภาพหมุน

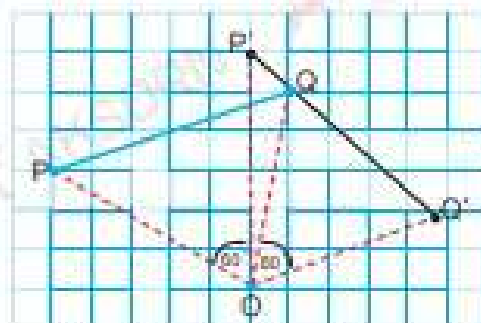


ตัวอย่างที่ 11

จงสร้างส่วนของเส้นตรงซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\overline{PQ}$ โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 60°



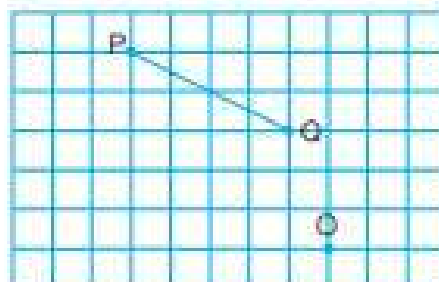
- วิธีทำ 1) ลาก $\overline{OP}$ แล้วสร้าง $\angle POP'$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาให้มีขนาด 60° และ $OP = OP'$
- 2) ลาก $\overline{OQ}$ แล้วสร้างมุม $\angle QOQ'$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาให้มีขนาด 60° และ $OQ = OQ'$
- 3) ลาก $\overline{P'Q'}$
- จะได้ $\overline{P'Q'}$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\overline{PQ}$ โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 60° ตามที่ต้องการ



ตอบ

ลองทำดู

จงสร้างส่วนของเส้นตรงซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\overline{PQ}$ โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 120°



ตัวอย่างที่ 12

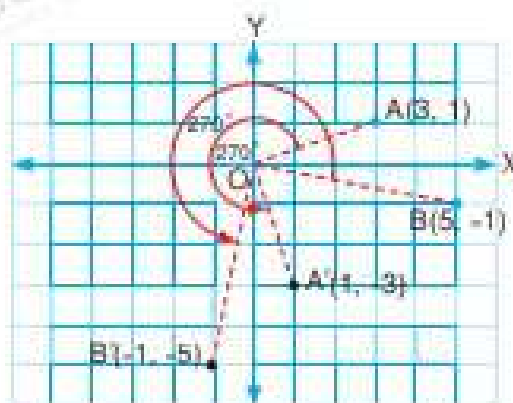
จงหาจุดที่เกิดจากการหมุนจุด $A(3, 1)$ และจุด $B(5, -1)$ โดยให้จุดกำเนิด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 270°

วิธีทำ กำหนดจุด $A(3, 1)$ จากนั้นหมุน $\overline{OA}$ โดยมีจุดกำเนิด O เป็นจุดหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมขนาด 270° ถึงจุด $A'(1, -3)$

ดังนั้น จุด $A'(1, -3)$ เป็นจุดที่เกิดจากการหมุนจุด A โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 270°

กำหนดจุด $B(5, -1)$ จากนั้นหมุน $\overline{OB}$ โดยมีจุด O เป็นจุดหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 270° ถึงจุด $B'(-1, -5)$

ดังนั้น จุด $B'(-1, -5)$ เป็นจุดที่ได้จากการหมุนจุด B โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 270°



ตอบ



จงหาจุดที่เกิดจากการหมุนจุด $A(-2, 2)$ และจุด $B(-5, -3)$ โดยให้จุดกำเนิด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 270°

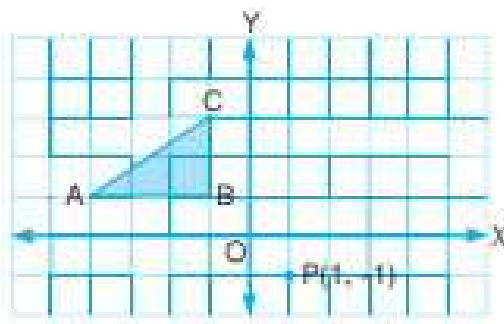
+ คณิตน่ารู้

การหมุนรูปเรขาคณิต

- 1) ภาพที่ได้จากการหมุนจะมีขนาดและรูปร่างเหมือนกับรูปต้นแบบ
- 2) จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบจะเคลื่อนที่รอบจุดหมุนด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากัน
- 3) จุดคู่ที่สมนัยกันแต่ละคู่เป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกันที่มีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลาง ซึ่งวงกลมแต่ละวงไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน
- 4) เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดคู่ที่สมนัยกันแต่ละคู่เป็นจุดปลายจะผ่านจุดหมุน

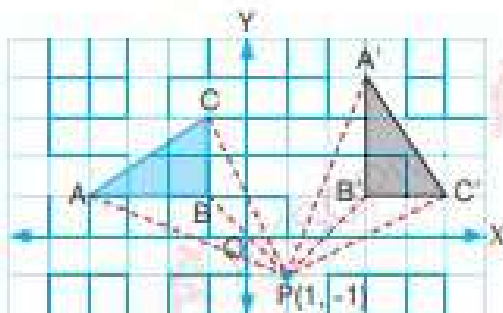
ตัวอย่างที่ 13

จงสร้างภาพที่ได้จากการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 90° โดยให้ $P(1, -1)$ เป็นจุดหมุน



วิธีทำ ลาก $\overline{PA}$ ให้จุด P เป็นจุดหมุน หมุน $\overline{PA}$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 90° ถึงจุด A'

ในทำนองเดียวกัน หมุน $\overline{PB}$ และ $\overline{PC}$ จะได้ จุด B' และจุด C' ตามลำดับ แล้วลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ และ $\overline{C'A'}$



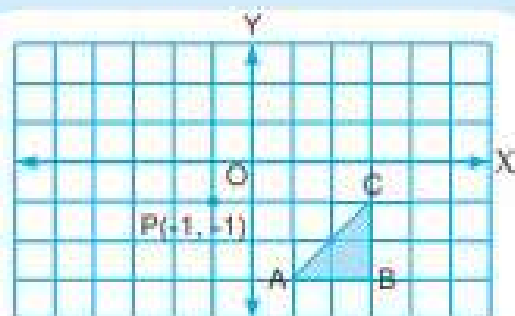
Thinking Time

จากตัวอย่างที่ 13 ถ้าต้องการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ในทิศทางเข็มนาฬิกาให้ได้ภาพจากการหมุนเป็นภาพเดียวกันและอยู่ในตำแหน่งเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ จะต้องหมุนด้วยมุมเท่าใด

จะได้ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีจุด P เป็นจุดหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90° ตอบ

ลองทำ

จงสร้างภาพที่ได้จากการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมที่มีขนาด 120° โดยให้ $P(-1, -1)$ เป็นจุดหมุน

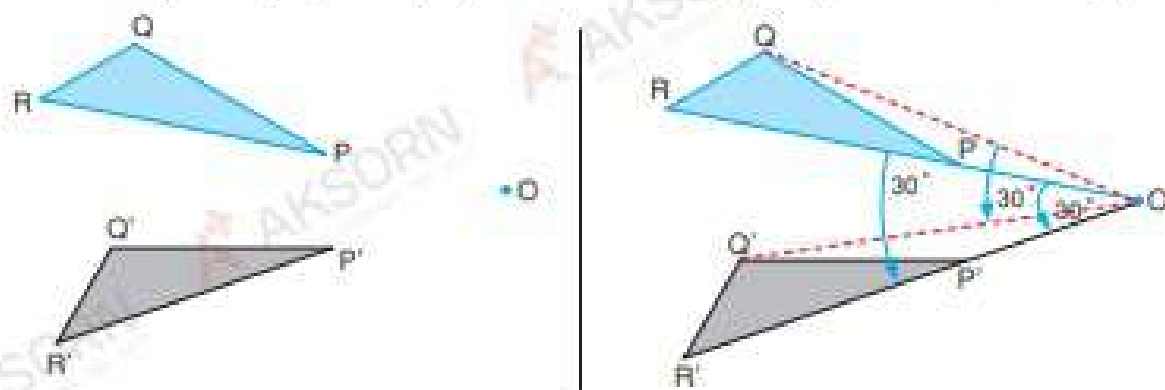


พิจารณารูปสามเหลี่ยม PQR ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ และรูปสามเหลี่ยม $P'Q'R'$ ซึ่งเป็นภาพ
ที่ได้จากการหมุนโดยมีจุด P เป็นจุดหมุน จงหาขนาดของมุมที่หมุน



จากรูป เมื่อวัดขนาดของ $\angle QPQ'$ และ $\angle RPR'$
จะพบว่ามีความยาว 180° เท่ากัน
ดังนั้น ขนาดมุมที่หมุนเท่ากับ 180°

พิจารณารูปสามเหลี่ยม PQR ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ และรูปสามเหลี่ยม $P'Q'R'$ ซึ่งเป็นภาพ
ที่ได้จากการหมุนโดยมีจุด O เป็นจุดหมุน จงหาขนาดของมุมที่หมุนและทิศทางในการหมุน

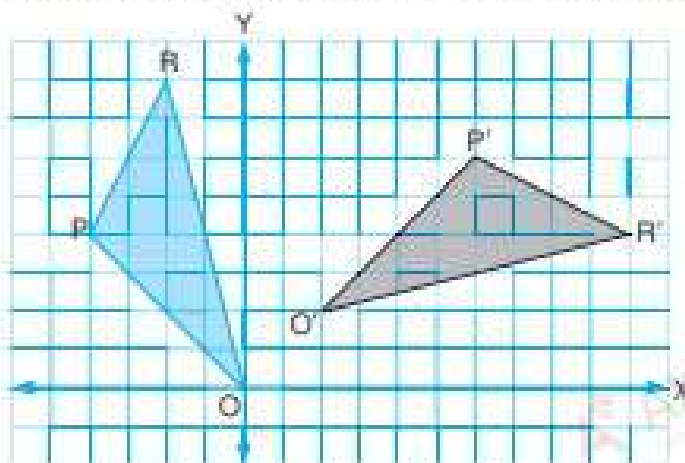


ลาก $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OQ'}$, $\overline{OR}$ และ $\overline{OR'}$ จะได้ว่า ขนาดของ $\angle POP'$, $\angle QOQ'$ และ $\angle ROO'$ เท่ากัน
แต่เป็นการหมุนที่ขนาดของมุมไม่เท่ากับ 90° , 180° และ 270° จึงต้องใช้การวัดขนาดของ $\angle POP'$,
 $\angle QOQ'$ และ $\angle ROO'$ ซึ่งวัดได้ขนาด 30° เท่ากัน

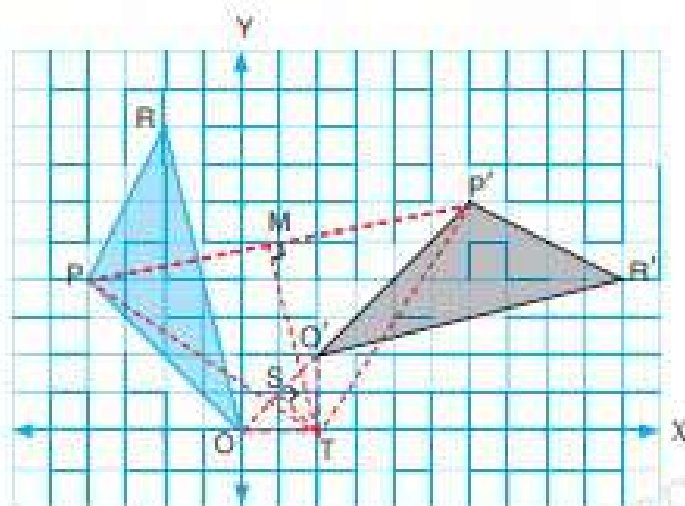
จะได้ว่า ขนาดมุมที่ใช้ในการหมุนเท่ากับ 30° และหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่างที่ 14

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม PQR เป็นรูปต้นแบบ และรูปสามเหลี่ยม $P'Q'R'$ เป็นภาพ
ที่ได้จากการหมุน จงหาจุดหมุน ทิศทาง และขนาดของมุมที่ใช้ในการหมุน



- วิธีทำ 1) ลาก $\overline{PP'}$ และกำหนดจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{PP'}$
 2) ลากเส้นให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$
 3) ลาก $\overline{OO'}$ และกำหนดจุด S เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{OO'}$
 4) ลากเส้นให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{OO'}$ และตัดกับเส้นที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP'}$ ในข้อ 2) ที่จุด T
 5) วัดขนาดของ $\angle PTP'$ และ $\angle OT'O'$ ได้เท่ากับ 90°



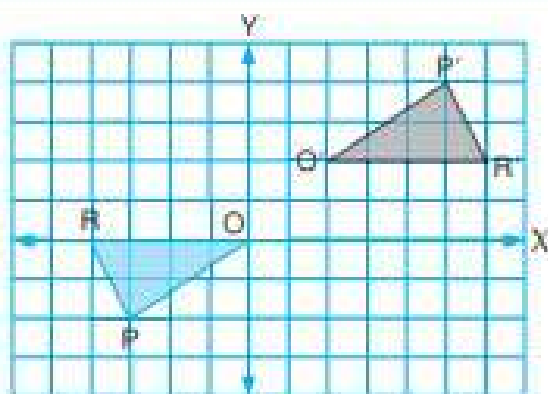
แนะแนวคิด

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดต้นแบบกับจุดที่สมนัยจะผ่านจุดหมุน

จะได้ว่า จุด T เป็นจุดหมุน หมุนไปในทิศทางเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90° ตอบ

ลองทำดู

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม POR เป็นรูปต้นแบบ และรูปสามเหลี่ยม P'O'R' เป็นภาพที่ได้จากการหมุน จงหาจุดหมุน ทิศทาง และขนาดของมุมที่ใช้ในการหมุน

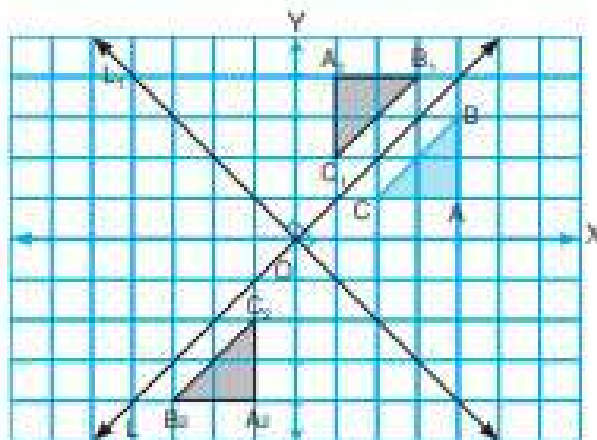


4.3 ความสัมพันธ์ของการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน

จากการศึกษาเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนในหัวข้อที่ 4.2 ซึ่งเป็น การดำเนินการเพียงลักษณะเดียว สำหรับในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินการ ที่ซับซ้อนขึ้นของการแปลง ดังกิจกรรมต่อไปนี้

กิจกรรม คณิตศาสตร์

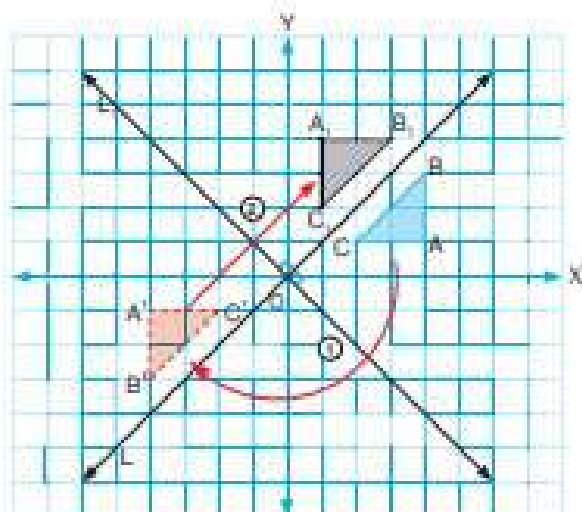
กำหนดให้ รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ
รูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน
รูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีเส้นตรง L_1 เป็นเส้นสะท้อน ดังรูป



นอกจากวิธีที่กำหนดไว้ในข้างต้น นักเรียนสามารถใช้การแปลงทางเรขาคณิตวิธีใด ได้อีกบ้างที่ทำให้ได้ภาพที่เกิดจากการแปลงเป็น $\Delta A_1B_1C_1$ และ $\Delta A_2B_2C_2$ ที่เกิดจากรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ (ใช้ได้มากกว่า 1 วิธี) โดยทำลงในสมุด

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะพบว่า

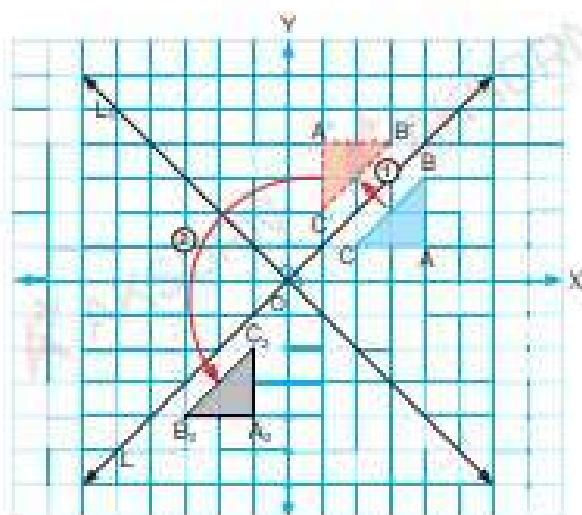
1) การแปลงรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ แล้วได้ภาพที่เกิดจากการแปลงเป็นรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ สามารถทำได้หลายวิธี เช่น



- (1) หมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° โดยมีจุดกำเนิด O เป็นจุดหมุน
- (2) สะท้อนภาพที่ได้จากการหมุนในข้อ (1) โดยมีเส้นตรง L_1 เป็นเส้นสะท้อน จะได้ภาพสะท้อนเป็นรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ จึงสามารถกล่าวได้ว่า

ถ้าหมุนรูปต้นแบบไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดหมุนแล้วสะท้อนรูปนั้นโดยมีเส้นตรง L_1 เป็นเส้นสะท้อนจะทำให้ภาพที่ได้จากการสะท้อนครั้งที่สองเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบเดิม โดยมีเส้นสะท้อนตั้งฉากกับเส้นสะท้อนเส้นเดิม

2) การแปลงรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ แล้วได้ภาพที่เกิดจากการแปลงเป็นรูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ สามารถทำได้หลายวิธี เช่น



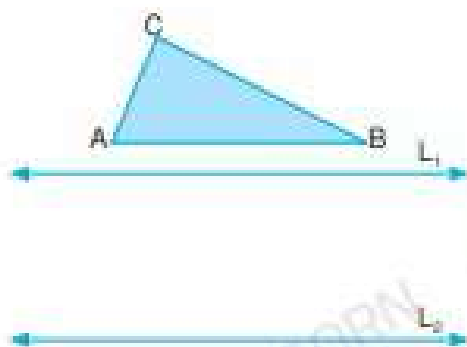
- (1) สะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน
- (2) หมุนภาพที่ได้จากการสะท้อนในข้อ (1) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° โดยมีจุดกำเนิด O เป็นจุดหมุน จะได้ภาพจากการหมุนเป็นรูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ จึงสามารถกล่าวได้ว่า

ถ้าสะท้อนรูปต้นแบบโดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อนแล้วหมุนภาพที่ได้จากการสะท้อนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดหมุน จะทำให้ภาพที่ได้จากการหมุนครั้งที่สองเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบเดิม โดยมีเส้นสะท้อนตั้งฉากกับเส้นสะท้อนเส้นเดิม

กิจกรรม คณิตศาสตร์

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ โดยทำลงในสมุด

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ ซึ่งมีเส้นตรง L_1 และ L_2 เป็นเส้นสะท้อน โดยที่ $L_1 \parallel L_2$

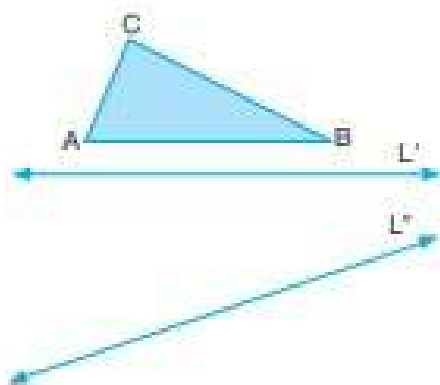


จากรูปที่กำหนด ให้นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้

- 1) สะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีเส้นตรง L_1 เป็นเส้นสะท้อน จะได้รูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ จากภาพที่ได้จากการสะท้อน
- 2) สะท้อนรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ โดยมีเส้นตรง L_2 เป็นเส้นสะท้อน จะได้รูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ จากภาพที่ได้จากการสะท้อน

- 3) ให้นักเรียนสังเกตรูปร่างและตำแหน่งของรูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ โดยเปรียบเทียบกับรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ ซึ่งมีเส้นตรง L' และ L'' เป็นเส้นสะท้อน โดยที่ L' ไม่ขนานกับ L''

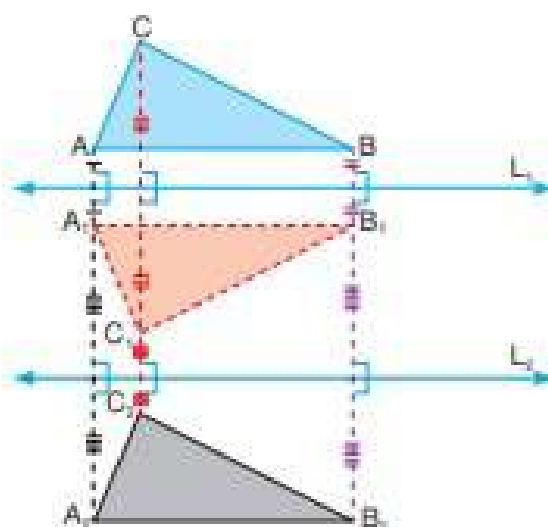


จากรูปที่กำหนด ให้นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้

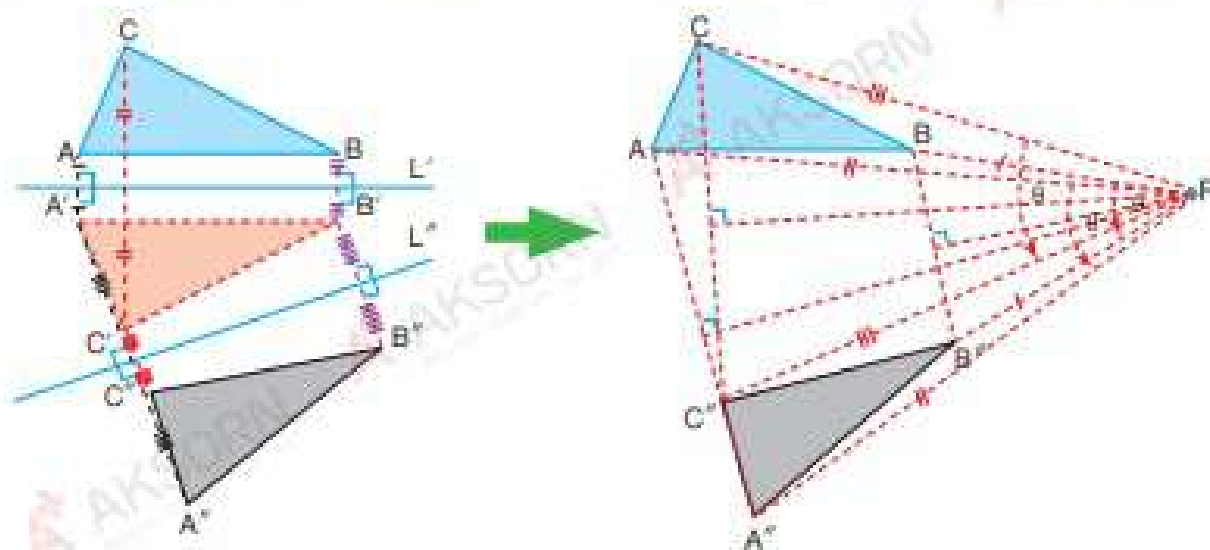
- 1) สะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีเส้นตรง L' เป็นเส้นสะท้อน จะได้รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน
- 2) สะท้อนรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ โดยมี L'' เป็นเส้นสะท้อน จะได้รูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน

- 3) ให้นักเรียนสังเกตรูปร่างและตำแหน่งของรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$ โดยเปรียบเทียบกับรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ ตอนที่ 1 เมื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ โดยมีเส้นตรง L_1 และ L_2 เป็นเส้นสะท้อน โดยที่ $L_1 \parallel L_2$ จะได้รูป ดังนี้



จากรูป จะพบว่ารูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC จากทฤษฎีบทคณิตศาสตร์ ตอนที่ 2 เมื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ โดยมี L' และ L'' เป็นเส้นสะท้อน โดยที่ L' ไม่ขนานกับ L'' จะได้



พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างรูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$

- 1) ลาก $\overline{AA''}$ แล้วหาจุดกึ่งกลาง จากนั้นลากเส้นตรงให้ผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับ $\overline{AA''}$
- 2) ลาก $\overline{BB''}$ แล้วหาจุดกึ่งกลาง จากนั้นลากเส้นตรงให้ผ่านจุดกึ่งกลางและตั้งฉากกับ $\overline{BB''}$ ซึ่งจะพบว่าเส้นตรงที่ลากในข้อ 2) จะไปตัดกับเส้นตรงที่ลากในข้อ 1) โดยกำหนดให้จุดตัดนั้นเป็นจุด P
- 3) ลาก $\overline{CC''}$ แล้วหาจุดกึ่งกลาง จากนั้นลากเส้นตรงให้ผ่านจุดกึ่งกลาง และตั้งฉากกับ $\overline{CC''}$ ซึ่งจะพบว่าเส้นตรงที่ลากในข้อ 3) จะไปตัดเส้นตรงที่ลากในข้อ 1) และข้อ 2) ที่จุด P เหมือนกัน

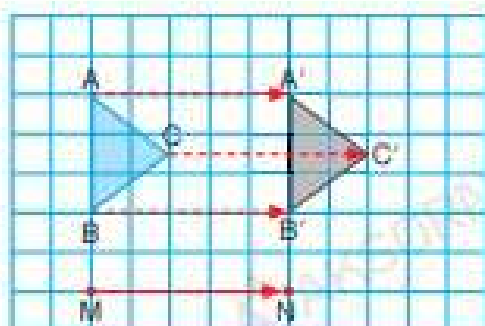


สรุปแนวคิดหลัก

การแปลงทางเรขาคณิต

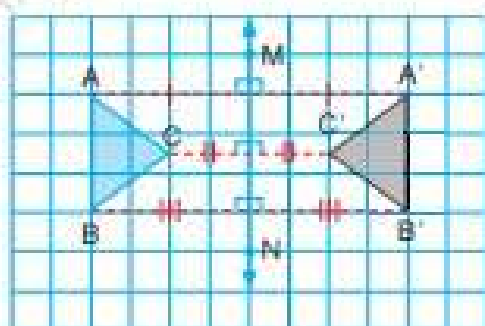
การแปลงทางเรขาคณิตเป็นการดำเนินการเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต ซึ่งทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง โดยอาจมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่าง

การเลื่อนขนาน



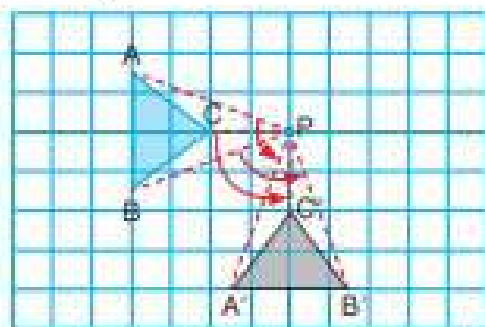
การเลื่อนขนานเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่จุดทุกจุดบนรูปต้นแบบมีการเลื่อนไปในทิศทางเดียวกันและเป็นระยะเท่ากัน ซึ่งขนาดและรูปร่างของภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจะเหมือนรูปต้นแบบ

การสะท้อน



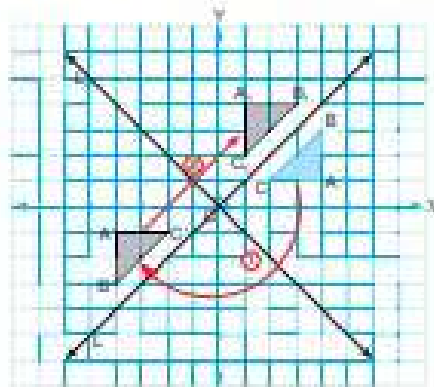
การสะท้อนเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่จุดแต่ละจุดบนภาพที่ได้จากการสะท้อนกับจุดบนรูปต้นแบบที่สมมาตรกันห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน ซึ่งขนาดและรูปร่างของภาพที่ได้จากการสะท้อนจะเหมือนรูปต้นแบบแต่มีทิศทางกลับกันกับรูปต้นแบบ

การหมุน

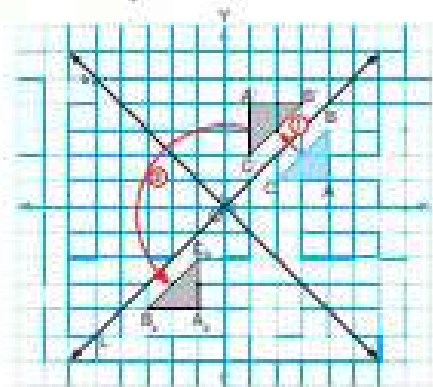


การหมุนเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุนในทิศทางเดียวกันด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากัน ซึ่งขนาดและรูปร่างของภาพที่ได้จากการหมุนจะเหมือนรูปต้นแบบ

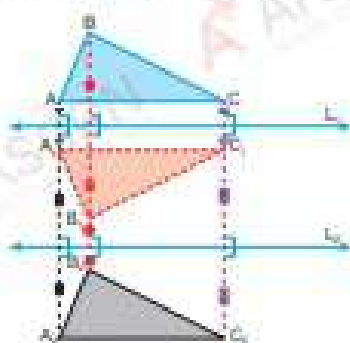
ความสัมพันธ์ของการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน



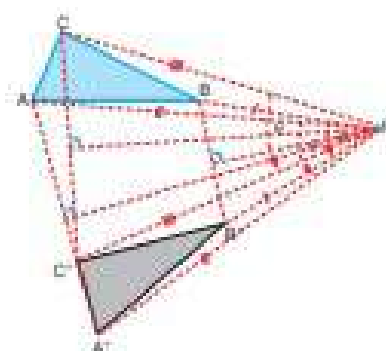
ถ้าหมุนรูปต้นแบบไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดหมุนแล้วสะท้อนรูปนั้นโดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อนทำให้ภาพที่ได้จากการสะท้อนครั้งที่สองเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบเดิม โดยมีเส้นสะท้อนตั้งฉากกับเส้นสะท้อนเดิม



ถ้าสะท้อนรูปต้นแบบโดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อนแล้วหมุนภาพที่ได้จากการสะท้อนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดหมุน ทำให้ได้จากการหมุนครั้งที่ 2 เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบเดิม โดยมีเส้นสะท้อนตั้งฉากกับเส้นสะท้อนเส้นเดิม



ภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบโดยมีเส้นสะท้อนสองเส้นที่ขนานกัน จะเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปต้นแบบเดิม



ภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปต้นแบบโดยมีเส้นสะท้อนสองเส้นที่ไม่ขนานกัน จะเป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูปต้นแบบเดิม