

ความเท่ากันทุกประการ



ที่มา: คลังภาพ อจท.

ว่าวเป็นการละเล่นที่นิยมเล่นตั้งแต่ในวัยเด็ก สามารถเล่นได้ทั้งฤดูร้อนและฤดูหนาว ว่าวมีหลายชนิด เช่น ว่าวจุฬา ว่าวภู ว่าวปักเป้า การประดิษฐ์ว่าวจะมีการทำแบบ การขึ้นโครงซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวที่มีสัดส่วนสมดุล

ตัวชี้วัด

- เข้าใจและใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง (ค 2.2 ม.2/4)

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
- การนำความรู้เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการไปใช้ในการแก้ปัญหา



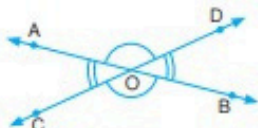
นักเรียนจะ
ตรวจสอบว่า

ว่าวที่ประดิษฐ์ขึ้น
เป็นรูปสี่เหลี่ยม
รูปว่าวได้อย่างไร



ควรรู้ก่อนเรียน

มุมตรงข้าม



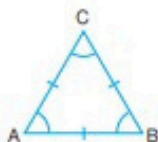
มุมตรงข้าม คือ มุม 2 มุมที่มีขนาดเท่ากัน และเกิดจากเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

จากรูปจะพบว่า

$\angle AOC$ เป็นมุมตรงข้ามกับ $\angle BOD$ จะได้ $\angle AOC = \angle BOD$

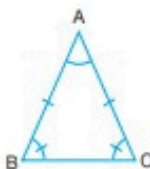
$\angle AOD$ เป็นมุมตรงข้ามกับ $\angle BOC$ จะได้ $\angle AOD = \angle BOC$

รูปสามเหลี่ยม



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

- ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน
- มุมทุกมุมมีขนาด 60° เท่ากัน



รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

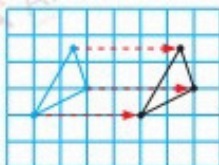
- ด้านยาวเท่ากันสองด้าน
- มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน



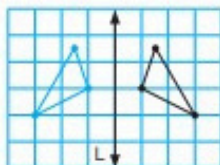
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

- มุมภายในมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก
- ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด

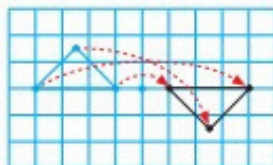
การแปลงทางเรขาคณิต



การเลื่อนขนาน



การสะท้อน



การหมุน



แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน

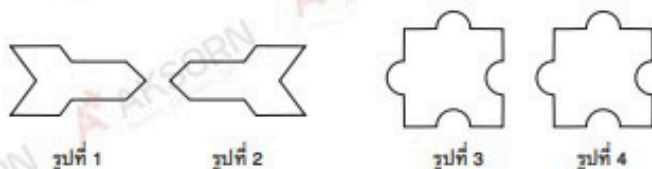


5.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

1. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

ในระดับชั้นประถมศึกษา นักเรียนสามารถตรวจสอบว่ารูปเรขาคณิตสองรูปใด ๆ เท่ากันทุกประการหรือไม่ โดยใช้กระดาษลอกลายลอกรูปหนึ่งแล้วนำไปทับอีกรูปหนึ่ง ถ้ารูปทับกันได้สนิท แสดงว่ารูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ แต่ในระดับชั้นนี้ นักเรียนมีความรู้เรื่องการแปลงที่รูปต้นแบบและภาพที่มีขนาดและรูปร่างคงเดิม ซึ่งกล่าวได้ว่ารูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการแปลงเท่ากันทุกประการ

พิจารณารูปต่อไปนี้



นักเรียนจะเห็นว่า สามารถพลิกรูปที่ 1 และเคลื่อนที่ไปทับรูปที่ 2 ได้สนิท ซึ่งกล่าวได้ว่า รูปที่ 2 เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูปที่ 1 โดยมีเส้นตรงเส้นหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน และสามารถเคลื่อนที่รูปที่ 3 ไปทับรูปที่ 4 ได้สนิท ในทางคณิตศาสตร์เมื่อรูปเรขาคณิตรูปหนึ่งเคลื่อนที่ไปทับรูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี จะกล่าวว่ารูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

บทนิยาม

รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ เคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

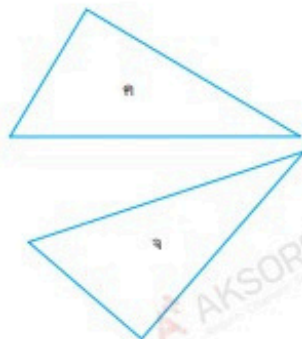
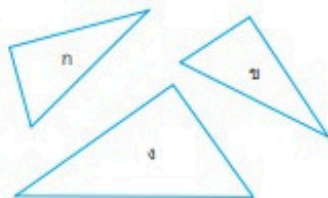
จากบทนิยามสามารถกล่าวได้ว่า “ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วจะเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท และถ้าเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท แล้วรูปเรขาคณิตสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ”

เมื่อรูปเรขาคณิต A และรูปเรขาคณิต B เท่ากันทุกประการ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{รูป A} \cong \text{รูป B}$ อ่านว่า รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B หรือ รูป A และรูป B เท่ากันทุกประการ

กิจกรรม คณิตศาสตร์

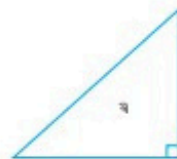
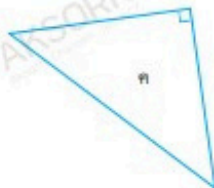
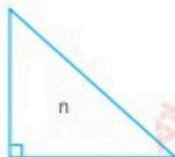
ให้นักเรียนคาดคะเนว่ารูปเรขาคณิตในแต่ละข้อต่อไปนี้ รูปเรขาคณิตคู่ใดเท่ากันทุกประการ แล้วตรวจสอบรูปคู่ นั้น โดยใช้กระดาษลอกกลายลอกรูปหนึ่งไปกับอีกรูปหนึ่งว่าทับกันได้สนิทหรือไม่

1.



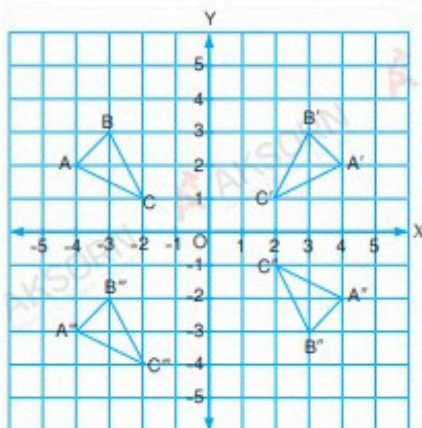
จากการตรวจสอบ จะได้ว่า _____

2.



จากการตรวจสอบ จะได้ว่า _____

จากหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 นักเรียนได้เรียนรู้เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตกล่าวถึง การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนซึ่ง เป็นการเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่รูปร่าง และขนาดของรูปเรขาคณิตที่เคลื่อนที่นั้นไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นจึงสามารถใช้ความรู้เรื่องการแปลง ทางเรขาคณิต เพื่อตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต



รูปที่ 5

จากรูปที่ 5 เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปโดยมีรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ

- 1) พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$

จะพบว่า (1) จุด A' และจุด A ห่างจากแกน Y เป็นระยะ 4 หน่วยเท่ากัน

ดังนั้น จุด A' และจุด A เป็นจุดที่สมนัยกัน

จุด B' และจุด B ห่างจากแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วยเท่ากัน

ดังนั้น จุด B' และจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน

และจุด C' และจุด C ห่างจากแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วยเท่ากัน

ดังนั้น จุด C' และจุด C เป็นจุดที่สมนัยกัน

- (2) แกน Y จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$

แสดงว่า รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ และ $CA = C'A'$

และกล่าวได้ว่ารูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม ABC

2) พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$

- จะพบว่า (1) เมื่อลาก $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, และ $\overline{CC''}$ จากนั้นหาจุดกึ่งกลางของ **ส่วนของเส้นตรง** $\overline{AA''}$ และ $\overline{BB''}$ แล้วลาก **เส้นตั้งฉาก** จะพบว่า เส้นตรงแต่ละเส้นที่ตั้งฉากกับจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงทั้งสามเส้นตัดกันที่จุด (0, 0)
- (2) จุด (0, 0) เป็นจุดหมุนของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$
- (3) จุด A'' และจุด A เป็นจุดที่สมนัยกัน จุด B'' และจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน และจุด C'' กับจุด C เป็นจุดที่สมนัยกัน

แสดงว่า รูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีจุด (0, 0) เป็นจุดหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° ดังนั้น $AB = A''B''$, $BC = B''C''$ และ $CA = C''A''$ และกล่าวได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$

3) พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$

- จะพบว่า (1) $AA'' = BB'' = CC''$ เท่ากับ 5 หน่วย
- (2) จุด A'' กับจุด A เป็นจุดที่สมนัยกัน จุด B'' กับจุด B เป็นจุดที่สมนัยกัน และจุด C'' กับจุด C เป็นจุดที่สมนัยกัน

แสดงว่า รูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ลงไปด้านล่าง 5 หน่วย

ดังนั้น $AB = A''B''$, $BC = B''C''$ และ $CA = C''A''$

และกล่าวได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$ นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$ และเท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม $A''B''C''$

ซึ่งสามารถเขียนแสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมทั้งสี่รูปได้เป็น $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \cong \triangle A''B''C'' \cong \triangle A''B''C''$



คณิตน่ารู้

การเขียนสัญลักษณ์แสดงรูปเรขาคณิตสองรูปที่เท่ากันทุกประการ นิยมเขียนตัวอักษรเรียงตามลำดับจุดยอดและด้านที่สมนัยกัน

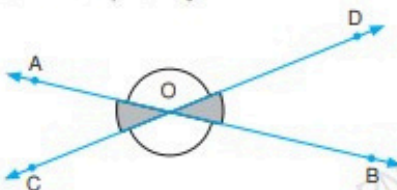
จากสมบัติ 1 อาจกล่าวได้ว่า "ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ แล้วส่วนของเส้นตรงทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน และถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วส่วนของเส้นตรงทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการ"

❖ คณิตน่ารู้

ถ้า $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ แล้ว $AB = CD$ และถ้า $AB = CD$ แล้ว $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

3. ความเท่ากันทุกประการของมุม

กำหนด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกันที่จุด O ดังรูป



ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 นักเรียนทราบแล้วว่า ถ้าเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน จากรูปข้างต้น จึงได้ว่า $\angle AOC$ เป็นมุมตรงข้ามกับ $\angle BOD$ และ $\angle AOD$ เป็นมุมตรงข้ามกับ $\angle BOC$

ดังนั้น $\angle AOC = \angle BOD$ และ $\angle AOD = \angle BOC$

จากรูปข้างต้น ถ้าใช้สมบัติการหมุนของการแปลงทางเรขาคณิตจะเห็นว่า มุมคู่ตรงข้ามกันจะได้จากการหมุนมุมหนึ่งซึ่งเป็นรูปต้นแบบรอบจุดหมุน O ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° องศา จะทำให้ได้ภาพที่ได้จากการหมุนเป็นมุมตรงข้าม เช่น $\angle BOD$ เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\angle AOC$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° องศา ดังนั้น มุมตรงข้ามกันจะทับกันสนิท

ดังนั้น ถ้า $\angle AOC = \angle BOD$ แล้ว $\angle AOC \cong \angle BOD$

ซึ่งความเท่ากันทุกประการของมุม เป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

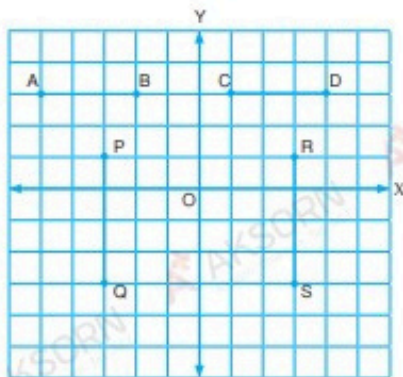
สมบัติ 2

มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ มุมทั้งสองมุนั้นมีขนาดเท่ากัน

จากสมบัติ 2 อาจกล่าวได้ว่า "ถ้ามุมสองมุมเท่ากันทุกประการ แล้วมุมทั้งสองมุนั้นมีขนาดเท่ากัน และถ้ามุมสองมุมมีขนาดเท่ากัน แล้วมุมทั้งสองมุนั้นเท่ากันทุกประการ"

2. ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

พิจารณาส่วนของเส้นตรงที่กำหนดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้



- 1) พิจารณา $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ โดย $AB = CD$

ถ้านักเรียนใช้กระดาษลอกลายลอก $\overline{AB}$ แล้วนำไปทับกับ $\overline{CD}$ โดยให้จุด A ทับจุด C จะพบว่าจุด B จะทับกับจุด D นั่นคือ $\overline{AB}$ ทับกับ $\overline{CD}$ ได้สนิทพอดี

และจากรูปจะเห็นว่า $\overline{CD}$ ได้จากการเลื่อนขนาน $\overline{AB}$ ตามแนวแกน X ไปทางขวานั้นคือ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

ดังนั้น ถ้า $AB = CD$ แล้ว $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

- 2) พิจารณา $\overline{PQ}$ และ $\overline{RS}$ โดย $PQ = RS$ ถ้านักเรียนใช้กระดาษลอกลายลอก $\overline{PQ}$ แล้วนำไปทับกับ $\overline{RS}$ โดยให้จุด P ทับจุด R จะพบว่าจุด Q จะทับกับจุด S นั่นคือ $\overline{PQ}$ ทับกับ $\overline{RS}$ ได้สนิทพอดี

จากรูปจะเห็นว่า $\overline{RS}$ ได้จากการสะท้อน $\overline{PQ}$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน นั่นคือ $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

ดังนั้น ถ้า $PQ = RS$ แล้ว $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

ซึ่งความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง เป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 1

ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงทั้งสองนั้นมีความยาวเท่ากัน

ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิตที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นไปตามสมบัติของความเท่ากันทุกประการที่กล่าวว่า

สมบัติ 3

ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วรูปเรขาคณิตทั้งสองรูปนั้นมีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน ในทางกลับกัน ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปมีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปเรขาคณิตทั้งสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

Thinking Time

นักเรียนคิดว่า

- 1) รูปเรขาคณิตรูปหนึ่ง ๆ จะเท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิตรูปนั้นหรือไม่
- 2) ถ้ารูปเรขาคณิต A เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต B แล้วรูปเรขาคณิต B จะเท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต A หรือไม่
- 3) ถ้ารูปเรขาคณิต A เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต B และรูปเรขาคณิต B เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต C แล้วรูปเรขาคณิต A จะเท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต C หรือไม่

จาก Thinking Time สรุปเป็นไปตามสมบัติของการเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิตได้ดังนี้

สมบัติ 4

กำหนดให้ A, B และ C เป็นรูปเรขาคณิตใด ๆ

สมบัติสะท้อน : รูป A $\cong$ รูป A

สมบัติสมมาตร : ถ้ารูป A $\cong$ รูป B แล้วรูป B $\cong$ รูป A

สมบัติถ่ายทอด : ถ้ารูป A $\cong$ รูป B และรูป B $\cong$ รูป C แล้วรูป A $\cong$ รูป C

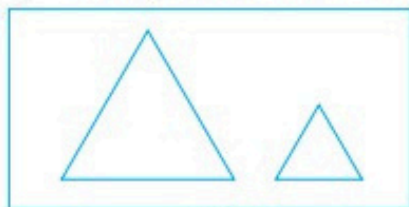
5.2 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนมักจะพบเห็นสถาปัตยกรรมต่าง ๆ หรือของเล่นที่ออกแบบโดยใช้โครงสร้างของรูปสามเหลี่ยม จึงกล่าวได้ว่ารูปสามเหลี่ยมเป็นรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีความสำคัญที่นักเรียนควรจะศึกษาให้มีความรู้และความเข้าใจให้มากขึ้น

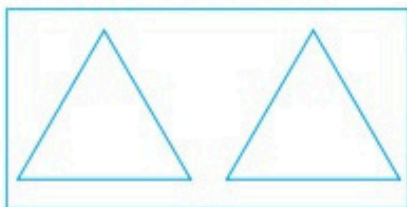
สำหรับการศึกษาเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต นักเรียนได้ทราบมาแล้วว่ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี สำหรับการศึกษาความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม จะตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปโดยการสังเกตหรือการวัดจากการปฏิบัติกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้



พิจารณารูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และเปรียบเทียบว่ามีขนาดเท่ากันหรือไม่เท่ากัน



รูปที่ 6



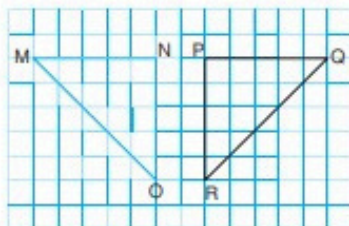
รูปที่ 7

จากรูปที่ 6 จะเห็นว่า สามารถเปรียบเทียบรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้ โดยใช้การสังเกตว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดไม่เท่ากัน

ส่วนรูปที่ 7 ไม่สามารถเปรียบเทียบรูปสามเหลี่ยมสองรูปโดยใช้การสังเกตได้ เพราะรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดที่ใกล้เคียงกันมาก หรืออาจจะมีความเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ ในกรณีเช่นนี้ จึงจำเป็นต้องใช้การตรวจสอบเพิ่มเติม โดยการลอกรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปทับกับอีกรูปหนึ่ง เพื่อดูว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นทับกันได้สนิทหรือไม่ หรืออีกวิธีหนึ่งอาจจะใช้การวัดความยาวของด้านทั้ง 3 ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป เพื่อเปรียบเทียบความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็นคู่ ๆ พร้อมทั้งตรวจสอบขนาดของมุมทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองว่าเท่ากันเป็นคู่ ๆ

ตัวอย่างที่ 1

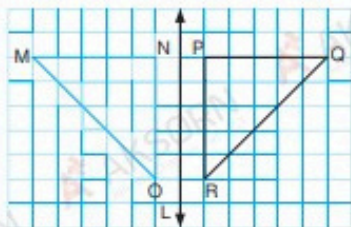
กำหนดให้ $\triangle MON \cong \triangle QRP$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน



วิธีทำ เนื่องจาก $\triangle MON \cong \triangle QRP$ จะได้ว่า เมื่อพลิกรูปสามเหลี่ยม MON โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อนไปทับกับรูปสามเหลี่ยม QRP จะทับกันได้สนิทพอดี

จะได้ว่า

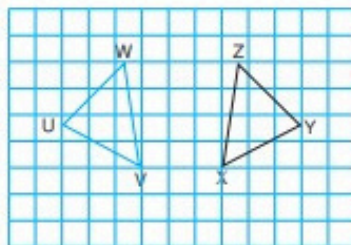
- $MN = QP$
- $MO = QR$
- $ON = RP$
- $\hat{MNO} = \hat{PQR}$
- $\hat{MON} = \hat{QRP}$
- $\hat{MNO} = \hat{QPR}$



ตอบ

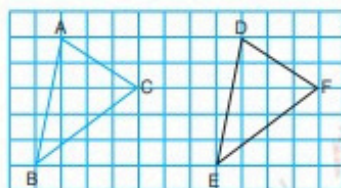
ลองทำ

กำหนดให้ $\triangle UVW \cong \triangle YXZ$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน

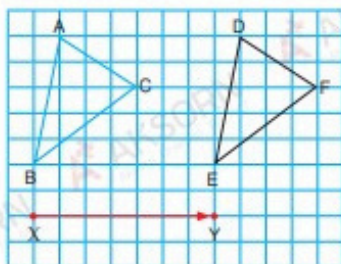


ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน



วิธีทำ



เนื่องจาก $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ จะได้ว่า เมื่อ
เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วย $\overline{XY}$
ไปทับกับรูปสามเหลี่ยม DEF จะทับกันได้
สนิทพอดี

จะได้ว่า $AB = DE$

$AC = DF$

$BC = EF$

$\hat{BAC} = \hat{EDF}$

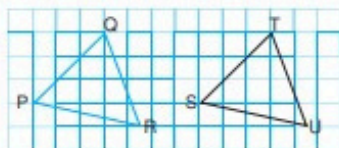
$\hat{ABC} = \hat{DEF}$

$\hat{BCA} = \hat{EFD}$

ตอบ

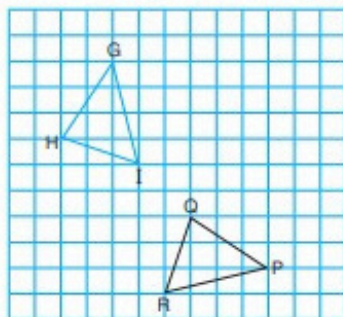
ลองทำ

กำหนดให้ $\triangle PQR \cong \triangle STU$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน



ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $\triangle GHI \cong \triangle PQR$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน



วิธีทำ เนื่องจาก $\triangle GHI \cong \triangle PQR$ จะได้ว่า เมื่อหมุนรูปสามเหลี่ยม GHI รอบจุดหมุน M ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90 องศา ไปทับรูปสามเหลี่ยม PQR จะทับกันได้สนิทพอดี

จะได้ว่า $GH = PQ$

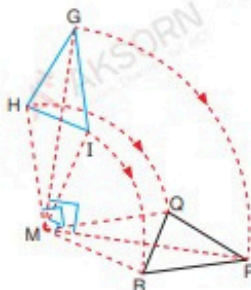
$HI = QR$

$IG = RP$

$\angle HGI = \angle QPR$

$\angle IGH = \angle RPQ$

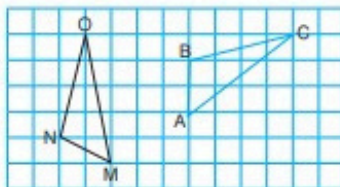
$\angle HIG = \angle QRP$



ตอบ

ลองทำดู

กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle MNO$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน



จากตัวอย่างที่ 1 - 3 สรุปเป็นไปตามสมบัติของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้

สมบัติ 5

รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

การเขียนสัญลักษณ์แสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมนิยมเขียนเรียงตามลำดับของมุมคู่ที่สมนัยกันและด้านคู่ที่สมนัยกัน เช่น

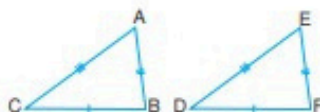


แบบฝึกทักษะ 5.2

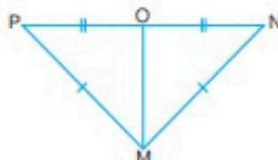
★ ระดับ พื้นฐาน

- จงพิจารณารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ต่อไปนี้ว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่ ถ้ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดเท่ากันทุกประการ ให้เขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน

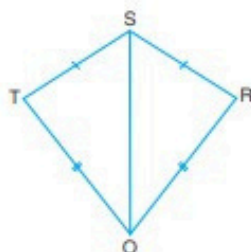
1)



2)



3)



4)



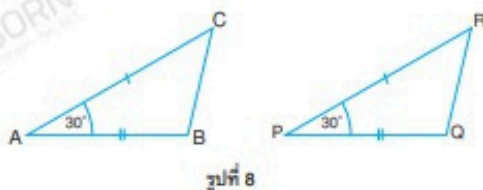
5.3 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบต่างๆ

การพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ตามที่ได้ศึกษามาแล้วนั้น จะใช้วิธีการแสดงให้เห็นว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันเท่ากัน สามคู่และมีขนาดของมุมคู่ที่สมนัยกันเท่ากันสามคู่ โดยใช้ความรู้เรื่องการแปลงมาช่วยในการตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

นอกจากวิธีการที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว นักเรียนยังสามารถพิจารณาความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ โดยใช้ความรู้เรื่องเรขาคณิตเกี่ยวกับความยาวด้านและขนาดของมุม ซึ่งรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการจะมีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

พิจารณารูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



รูปที่ 8

💡 คิดหน้ารู้

เนื่องจาก $\triangle ABC \cong \triangle PQR$
จะสามารถสรุปเพิ่มเติมได้ว่า
 $BC = QR$, $\hat{A}BC = \hat{P}QR$
และ $\hat{B}CA = \hat{Q}RP$

จากรูปที่ 8 จะเห็นว่า

$$AC = PR$$

$$\hat{C}AB = \hat{R}PQ = 30^\circ$$

$$AB = PQ$$

เมื่อเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC โดยให้จุด A ทับจุด P และ $\overline{AB}$ ทับ $\overline{PQ}$ เนื่องจาก $AB = PQ$ จึงทำให้จุด B ทับจุด Q และจาก $\hat{B}AC = \hat{Q}PR$ จึงทำให้ $\overline{AC}$ ทับ $\overline{PR}$ เนื่องจาก $AC = PR$ จึงทำให้จุด C ทับจุด R แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC ทับรูปสามเหลี่ยม PQR ได้สนิทพอดี ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม PQR เท่ากันทุกประการ

จากรูปที่ 8 จะพบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความยาวด้านเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านที่มีความยาวเท่ากันสองคู่นั้นเท่ากัน จะทำให้รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

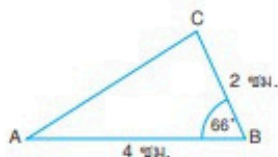
โดยทั่วไปจะเรียกความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความยาวของด้านเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่นี้มีขนาดเท่ากันว่า **ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมแบบ ด้าน-มุม-ด้าน** เขียนแทนด้วย ต.ม.ด. ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 6

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่นี้ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ 4

จงแสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ โดยมีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน



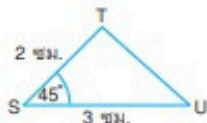
วิธีทำ เนื่องจาก $AB = PQ$ (ยาว 4 ซม. เท่ากัน)
 $\hat{A}BC = \hat{P}QR$ (มีขนาด 66° เท่ากัน)
 $BC = QR$ (ยาว 2 ซม. เท่ากัน)

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ โดยมีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน

ตอบ

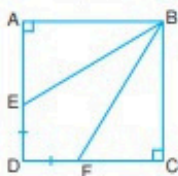
ลองทำ

จงแสดงว่า $\triangle STU \cong \triangle XYZ$ โดยมีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน



ตัวอย่างที่ 5

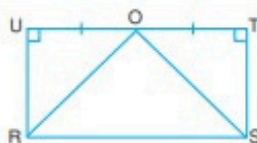
กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ $DE = DF$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle CBF$



- พิสูจน์
- $AB = CB$ ($\overline{AB}$ และ $\overline{CB}$ เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะยาวเท่ากัน)
 - $\hat{EAB} = \hat{FCB}$ (มุมภายในแต่ละมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาด 90° องศา)
 - $DE = DF$ (กำหนดให้)
 - $AD = CD$ ($\overline{AD}$ และ $\overline{CD}$ เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะยาวเท่ากัน)
 - $AE = CF$ (จากข้อ 3., 4.)
 - $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน) ตอบ

ลองทำ

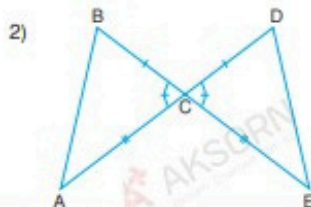
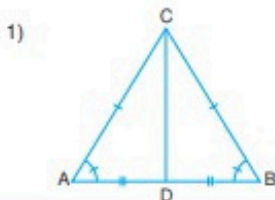
กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม RSTU เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ $OU = OT$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle RUO \cong \triangle STO$



แบบฝึกทักษะ 5.3 ก

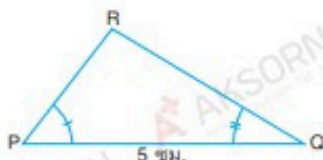
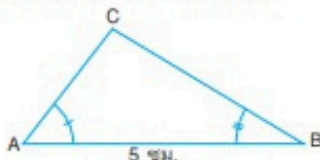
★ ระดับพื้นฐาน

- จงตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ คู่อันหนึ่งที่เท่ากันทุกประการ โดยมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน



2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ และรูปสามเหลี่ยม PQR เป็นภาพที่ได้จากการแปลง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



- 1) รูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม PQR มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเท่ากันหรือไม่
- 2) มีจุดใดบ้างที่เป็นจุดที่สมนัยกัน
- 3) มีด้านใดบ้างที่เป็นด้านที่สมนัยกัน
- 4) มีมุมใดบ้างที่เป็นมุมที่สมนัยกัน
- 5) $\triangle ABC$ กับ $\triangle PQR$ มีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด
- 6) รูปสามเหลี่ยม PQR เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานหรือไม่ เพราะเหตุใด
- 7) รูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใด

จากรูป ที่กำหนดข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{PQ}$ มีความยาวเท่ากัน $\hat{CAB} = \hat{RPQ}$ และ $\hat{ABC} = \hat{PQR}$ ซึ่งกล่าวได้ว่า $\triangle ABC$ กับ $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

กิจกรรม กณิตศาสตร์

ให้นักเรียนตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ คู่ใดบ้างที่เท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม



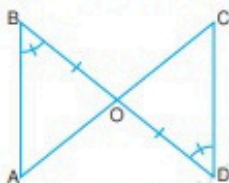
จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเรียกความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากันว่า **ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมแบบ มุม-ด้าน-มุม** เขียนแทนด้วย **ม.ด.ม.** ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 7

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ 6

จากรูป กำหนดให้ $\hat{A}BO = \hat{C}DO$ และ $BO = DO$ จงพิสูจน์ว่า $AB = CD$

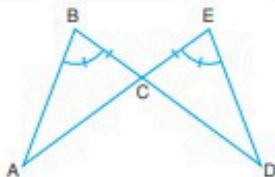


- พิสูจน์
1. $\hat{A}BO = \hat{C}DO$ (กำหนดให้)
 2. $BO = DO$ (กำหนดให้)
 3. $\hat{A}OB = \hat{C}OD$ (เป็นมุมตรงข้าม)
 4. $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (มีความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม)
 5. $AB = CD$ (จากข้อ 4.)

ตอบ

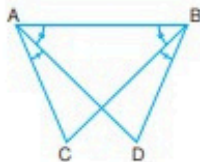
ลองทำ

จากรูป กำหนดให้ $\hat{A}BC = \hat{D}EC$ และ $BC = EC$ จงพิสูจน์ว่า $AB = DE$



ตัวอย่างที่ 7

จากรูปที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle BAD$



พิสูจน์ 1. $\hat{C}AD = \hat{D}BC$

(กำหนดให้)

2. $\hat{B}AD = \hat{A}BC$

(กำหนดให้)

3. $AB = BA$

($\overline{AB}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle ABC$ และ $\triangle BAD$)

4. $\hat{C}AD + \hat{BAD} = \hat{D}BC + \hat{ABC}$

$\hat{C}AB = \hat{D}BA$

(สมบัติของการเท่ากัน)

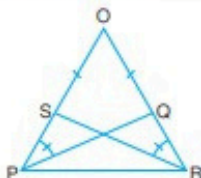
5. $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

(มีความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม)

ตอบ

ลองทำ

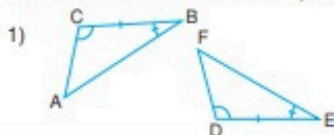
จากรูปที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่า $\triangle OPQ \cong \triangle ORS$



แบบฝึกทักษะ 5.3 ข

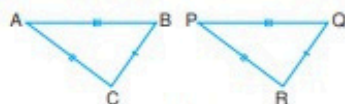
★ ระดับพื้นฐาน

1. จงพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ เท่ากันทุกประการ โดยมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน หรือแบบ มุม-ด้าน-มุม หรือไม่

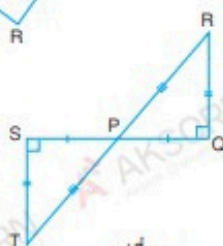


3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

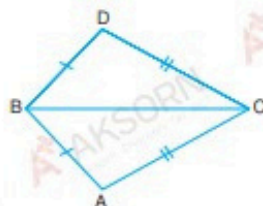
พิจารณารูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



รูปที่ 9



รูปที่ 11



รูปที่ 10

จะเห็นว่า จากรูปที่ 9 ถ้าเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ไปทางขวาตามแนวนอน ให้จุด A ทับจุด P จาก $AB = PQ$ จึงทำให้จุด B ทับจุด Q ในทำนองเดียวกันจาก $AC = PR$ และ $BC = QR$ จึงทำให้จุด C ทับจุด R แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC ทับรูปสามเหลี่ยม PQR ได้สนิทพอดี

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม PQR มีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{CAB} = \hat{RPQ}$, $\hat{ABC} = \hat{PQR}$ และ $\hat{BCA} = \hat{QRP}$

จากรูปที่ 10 สามารถพลิกรูปสามเหลี่ยม ABC สะท้อนด้วยส่วนของเส้นตรง BC ไปทับรูปสามเหลี่ยม DBC ได้สนิทพอดี

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DBC$

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DBC มีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{CAB} = \hat{CDB}$, $\hat{ABC} = \hat{DBC}$ และ $\hat{BCA} = \hat{BCD}$

จากรูปที่ 11 สามารถใช้จุด P เป็นจุดหมุน หมุนรูปสามเหลี่ยม PQR ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 180° รูปสามเหลี่ยม PQR จะทับรูปสามเหลี่ยม PST ได้สนิทพอดี

ดังนั้น $\triangle PQR \cong \triangle PST$

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม PQR และรูปสามเหลี่ยม PST มีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{RPQ} = \hat{TPS}$, $\hat{PQR} = \hat{PST}$ และ $\hat{QRP} = \hat{STP}$

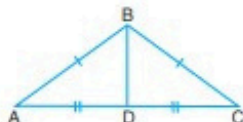
จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ มีความยาวของด้านเท่ากันทั้งสามคู่ ด้านต่อด้าน เรียกการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน และเขียนแทนด้วย ด.ด.ด. ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 8

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีความยาวของด้านเท่ากันสามคู่ด้านต่อด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ 8

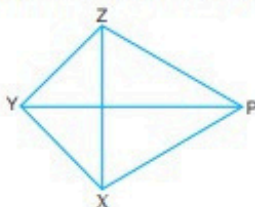
จงพิสูจน์ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ โดยมีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน



- พิสูจน์
- $AB = CB$ (กำหนดให้)
 - $AD = CD$ (กำหนดให้)
 - $BD = BD$ ($\overline{BD}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle ABD$ และ $\triangle CBD$)
 - $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 9

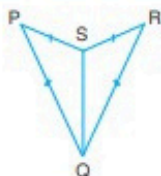
กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม $PXYZ$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว จงพิสูจน์ว่า $\triangle PXY \cong \triangle PZY$



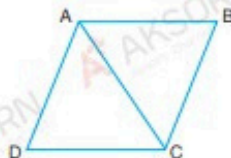
- พิสูจน์
- $PX = PZ$ (ด้านที่อยู่ติดกันของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว จะยาวเท่ากัน)
 - $XY = XZ$ (ด้านที่อยู่ติดกันของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว จะยาวเท่ากัน)
 - $PY = PY$ ($\overline{PY}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle PXY$ และ $\triangle PZY$)
 - $\triangle PXY \cong \triangle PZY$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน) **ตอบ**

ลองทำ

1. จงพิสูจน์ว่า $\triangle PQS \cong \triangle RQS$
โดยมีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน



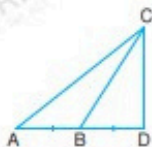
2. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle ADC$



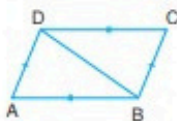
ตัวอย่างที่ 10

จงตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ คูใดบ้างที่มีความสัมพันธ์กัน
แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

1)



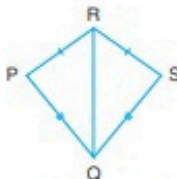
2)



3)



4)



วิธีทำ 1) $\triangle ABC$ กับ $\triangle BCD$ ไม่เท่ากันทุกประการ เพราะมีด้านยาวเท่ากันเพียงสองคู่ คือ
 $AB = BD$ และ $BC = BC$ และไม่มีมุมใดที่มีขนาดเท่ากัน

2) $\triangle ABD$ กับ $\triangle CDB$ เท่ากันทุกประการ

เพราะ $AD = CB$ (กำหนดให้)

$AB = CD$ (กำหนดให้)

$BD = DB$ ($\overline{DB}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle ABD$ และ $\triangle CDB$)

ดังนั้น $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน)

5.4 การนำความรู้เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการไปใช้ในการแก้ปัญหา

นักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการมาแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้นำความรู้และสมบัติของความเท่ากันทุกประการมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 11

จากรูป กำหนดให้ $AC = BC$ และ $AD = BD$ จงพิสูจน์ว่า

1) $\triangle ADC \cong \triangle BDC$

2) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

พิสูจน์ 1. $AC = BC$

(กำหนดให้)

2. $AD = BD$

(กำหนดให้)

3. $CD = CD$

($\overline{CD}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle ADC$ และ $\triangle BDC$)

4. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$

(มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน)

5. $\hat{ADC} = \hat{BDC}$

(จากข้อ 4.)

6. $\hat{ADC} + \hat{BDC} = 180^\circ$

(เป็นมุมตรง)

7. $2\hat{ADC} = 180^\circ$

(จากข้อ 5., 6.)

$\hat{ADC} = 90^\circ$

$2\hat{BDC} = 180^\circ$

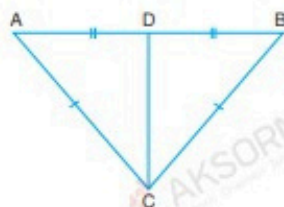
$\hat{BDC} = 90^\circ$

8. $\hat{ADC} = \hat{BDC} = 90^\circ$

(จากข้อ 7.)

9. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

(จากข้อ 8.)



💡 คิดค้นารู้

จากตัวอย่างที่ 11 จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งเส้นที่แบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

ตอบ

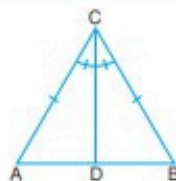
ลองทำดู

จากรูป กำหนดให้ $AC = BC$ และ $\hat{ACD} = \hat{BCD}$

จงพิสูจน์ว่า

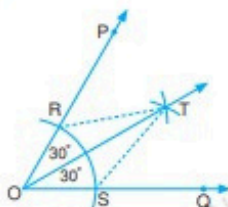
1) $\triangle ADC \cong \triangle BDC$

2) $\overline{DC} \perp \overline{AB}$



ตัวอย่างที่ 12

จงพิสูจน์ว่า $\overline{OT}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{POQ}$



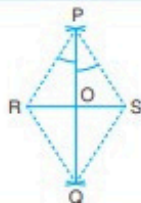
พิสูจน์ ในการพิสูจน์ว่า $\overline{OT}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{POQ}$ หรือไม่ จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $\widehat{POT} = \widehat{QOT}$

1. $OR = OS$ (วงกลมเดียวกันมีรัศมียาวเท่ากัน)
2. $RT = ST$ (วงกลมเดียวกันมีรัศมียาวเท่ากัน)
3. $OT = OT$ ($\overline{OT}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle ORT$ และ $\triangle OST$)
4. $\triangle ORT \cong \triangle OST$ (มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน)
5. $\widehat{POT} = \widehat{QOT}$ (จากข้อ 4.)
6. $\overline{OT}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{POQ}$ (จากข้อ 5.)

ตอบ

ลองทำ

จงพิสูจน์ว่า $\overline{PQ}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉาก $\overline{RS}$ ที่จุด O



แบบฝึกทักษะ 5.4

★ ระดับพื้นฐาน

1. กำหนดให้ $PS = RS$ และ $\overline{QS} \perp \overline{PR}$

จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว





สรุปแนวคิดหลัก

ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิตใด ๆ

รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ เคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

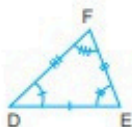
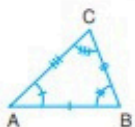
1) ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นมีความยาวเท่ากัน

2) ความเท่ากันทุกประการของมุม

มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ มุมทั้งสองมุมนั้นมีขนาดเท่ากัน

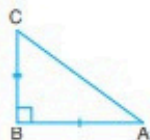
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม



รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

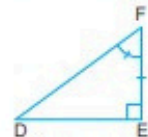
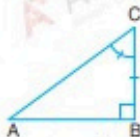
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน



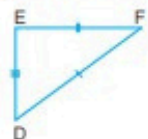
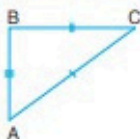
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม



ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน



ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีความยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ